Mathematisches Institut
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf
Dr. Alexander Bentkamp, Jon Eugster

WiSe 2023/24
7. November 2023

Computer-gestützte Beweisführung

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sind die folgenden Terme wohlgetypt im einfach getypten λ-Kalkül? Wenn ja, geben Sie den Typ des Terms an und ergänzen Sie den Typ jeder durch λ gebundenen Variable. (Sie brauchen hier keine Typderivation aufschreiben.) Hierbei seien A ein Basistyp und $\mathsf{f} : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, $\mathsf{g} : \mathsf{A} \to \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, $\mathsf{h} : (\mathsf{A} \to \mathsf{A}) \to \mathsf{A}$ und $\mathsf{a} : \mathsf{A}$ Konstanten.

(a) $(\lambda x.\, \mathsf{g}\ x\ x)\ (\mathsf{f}\ \mathsf{a})$
(b) $\lambda x.\, x\ x$
(c) $(\lambda y.\, \lambda x.\, y\ x)\ \mathsf{g}\ \mathsf{a}$
(d) $(\lambda x.\, \mathsf{f}\ (x\ \mathsf{a}))\ (\lambda x.\, \mathsf{f}\ (\mathsf{h}\ x))$

Lösung.

(a) $(\lambda x : \mathsf{A}.\, \mathsf{g}\ x\ x)\ (\mathsf{f}\ \mathsf{a}) : \mathsf{A}$
(b) $\lambda x.\, x\ x$ ist nicht wohlgetypt.
(c) $(\lambda y : \mathsf{A} \to \mathsf{A} \to \mathsf{A}.\, \lambda x : \mathsf{A}.\, y\ x)\ \mathsf{g}\ \mathsf{a} : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$
(d) Sowohl $(\lambda x.\, \mathsf{f}\ (x\ \mathsf{a}))$ als auch $(\lambda x.\, \mathsf{f}\ (\mathsf{h}\ x))$ haben Typ $(\mathsf{A} \to \mathsf{A}) \to \mathsf{A}$. Die Anwendung $(\lambda x.\, \mathsf{f}\ (x\ \mathsf{a}))\ (\lambda x.\, \mathsf{f}\ (\mathsf{h}\ x))$ ist daher nicht wohlgetypt.

Bitte wenden!

Aufgabe 2. Sei Nat ein Basistyp und seien $2 : \mathsf{Nat}$, $3 : \mathsf{Nat}$, $\mathsf{add} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$ Konstanten. Erstellen Sie eine Typderivation des Terms $(\lambda x : \mathsf{Nat}.\ \mathsf{add}\ x\ 2)\ 3$ im einfach getypten λ-Kalkül.

Lösung.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \mathsf{Nat} \vdash \mathsf{add} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}}\,\text{Konst} \quad \dfrac{}{x : \mathsf{Nat} \vdash x : \mathsf{Nat}}\,\text{Var}}{x : \mathsf{Nat} \vdash \mathsf{add}\ x : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}}\,\text{Anw} \quad \dfrac{}{x : \mathsf{Nat} \vdash 2 : \mathsf{Nat}}\,\text{Konst}}{x : \mathsf{Nat} \vdash \mathsf{add}\ x\ 2 : \mathsf{Nat}}\,\text{Anw}}{\vdash \lambda x : \mathsf{Nat}.\ \mathsf{add}\ x\ 2 : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}}\,\text{Lam} \quad \dfrac{}{\vdash 3 : \mathsf{Nat}}\,\text{Konst}}{\vdash (\lambda x : \mathsf{Nat}.\ \mathsf{add}\ x\ 2)\ 3 : \mathsf{Nat}}\,\text{Anw}$$

Aufgabe 3. Sei $\mathsf{Nat} : \mathsf{Type}$ eine Konstante. Geben Sie eine Typderivation im Calculus of Inductive Constructions für den folgenden Term an:

$$\lambda A : \mathsf{Type}.\ \Pi B : \mathsf{Type}.\ \mathsf{Nat} \to A \to B$$

Lösung.

$$\dfrac{\dfrac{}{A : \mathsf{Type} \vdash \mathsf{Type} : \mathsf{Type}_1}\,\text{Type} \quad \dfrac{\dfrac{}{A : \mathsf{Type},\ B : \mathsf{Type},\ x : \mathsf{Nat} \vdash \mathsf{Nat} : \mathsf{Type}}\,\text{Konst} \quad \dfrac{\dfrac{}{A : \mathsf{Type},\ B : \mathsf{Type},\ x : \mathsf{Nat} \vdash A : \mathsf{Type}}\,\text{Var} \quad \dfrac{}{A : \mathsf{Type},\ B : \mathsf{Type},\ x : \mathsf{Nat},\ y : A \vdash B : \mathsf{Type}}\,\text{Var}}{A : \mathsf{Type},\ B : \mathsf{Type},\ x : \mathsf{Nat} \vdash A \to B : \mathsf{Type}}\,\text{Pi}}{A : \mathsf{Type},\ B : \mathsf{Type} \vdash \mathsf{Nat} \to A \to B : \mathsf{Type}}\,\text{Pi}}{A : \mathsf{Type} \vdash \Pi B : \mathsf{Type}.\ \mathsf{Nat} \to A \to B : \mathsf{Type}_1}\,\text{Pi} \quad \dfrac{}{\vdash \mathsf{Type} : \mathsf{Type}_1}\,\text{Type}}{\vdash \lambda A : \mathsf{Type}.\ \Pi B : \mathsf{Type}.\ \mathsf{Nat} \to A \to B : \mathsf{Type} \to \mathsf{Type}_1}\,\text{Lam}$$

Aufgabe 4. Definieren Sie folgende Funktionen im Sinne von Abschnitt 3.4 des Skripts:

(a) Eine Funktion $\mathsf{mul} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$, die zwei natürliche Zahlen multipliziert. (Tipp: Nutzen Sie die Funktion add aus dem Skript.)

(b) Eine Funktion $\mathsf{length} : \Pi\{X : \mathsf{Type}\}.\ \mathsf{List}\ X \to \mathsf{Nat}$, die die Länge einer Liste zurückgibt.

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}&\mathbf{def}\ \ \mathsf{mul} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}\\ &\mid x,\ \mathsf{zero} \Rightarrow \mathsf{zero}\\ &\mid x,\ \mathsf{succ}\ y \Rightarrow \mathsf{add}\ (\mathsf{mul}\ x\ y)\ x\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}&\mathbf{def}\ \ \mathsf{length}\ \{X : \mathsf{Type}\} : \mathsf{List}\ X \to \mathsf{Nat}\\ &\mid \mathsf{nil} \Rightarrow \mathsf{zero}\\ &\mid \mathsf{cons}\ x\ xs \Rightarrow \mathsf{succ}\ (\mathsf{length}\ xs)\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Wie im Skript in Abschnitt 3.4 beschrieben, bringt die Definition von add auf den natürlichen Zahlen folgende definitionelle Gleichheiten mit sich: $\mathsf{add}\ s\ \mathsf{zero} \equiv s$ und $\mathsf{add}\ s\ (\mathsf{succ}\ t) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ s\ t)$ für beliebige Terme s und t. Welche der folgenden definitionellen Gleichheiten gelten für eine Variable $x : \mathsf{Nat}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ x)\ \mathsf{zero} \equiv \mathsf{succ}\ x$

(b) $\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ x)$

(c) $\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ x$

(d) $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ x)\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero}) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{succ}\ x)$

(e) $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero})\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{succ}\ x)$

(f) $\mathsf{zero} \equiv (\mathsf{id}\ \mathsf{add})\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero}$

Lösung.

(a) Richtig, wegen ι-Äquivalenz „$\mathsf{add}\ s\ \mathsf{zero} \equiv s$“ mit $s = \mathsf{succ}\ x$.

(b) Richtig, wegen ι-Äquivalenz „$\mathsf{add}\ s\ (\mathsf{succ}\ t) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ s\ t)$“ mit $s = \mathsf{zero}$ und $t = x$.

(c) Falsch. Es gilt zwar $\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ x)$, aber $\mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ x) \not\equiv \mathsf{succ}\ x$, denn diese Gleichheit kann nur durch eine Fallunterscheidung des Wertes von x gezeigt werden.

(d) Richtig. $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ x)\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero}) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ x)\ \mathsf{zero}) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{succ}\ x)$

(e) Falsch. Es gilt zwar $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero})\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero})\ x)$, aber $\mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero})\ x) \not\equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{succ}\ x)$, denn auch diese Gleichung

kann nicht durch reines Umschreiben mit definitionellen Gleichheiten gezeigt werden.

(f) Richtig. $\mathsf{zero} \overset{\iota}{\equiv} \mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \overset{\beta}{\equiv} ((\lambda\{X : Type\}\ (x : X).\ x)\ \mathsf{add})\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero} \overset{\delta}{\equiv} (\mathsf{id}\ \mathsf{add})\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero}$