Mathematisches Institut
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf
Dr. Alexander Bentkamp, Jon Eugster

WiSe 2023/24
16. Januar 2024

Computer-gestützte Beweisführung

Übungsblatt 11

Für die folgenden Aufgaben verwenden wir folgende syntaktische und semantische Regeln:

GN $\longrightarrow$ Schlumpf	$[\![\mathbf{GN}]\!] := (\mathsf{schlumpf} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
GN $\longrightarrow$ Geschenk	$[\![\mathbf{GN}]\!] := (\mathsf{geschenk} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
EN $\longrightarrow$ Sofia	$[\![\mathbf{EN}]\!] := (\mathsf{sofia} : \mathsf{Entität})$
IV $\longrightarrow$ lacht	$[\![\mathbf{IV}]\!] := (\mathsf{lacht} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
IV $\longrightarrow$ stinkt	$[\![\mathbf{IV}]\!] := (\mathsf{stinkt} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
TV $\longrightarrow$ versteckt	$[\![\mathbf{TV}]\!] := (\mathsf{versteckt} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
TV $\longrightarrow$ umarmt	$[\![\mathbf{TV}]\!] := (\mathsf{umarmt} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
P $\longrightarrow$ mit	$[\![\mathbf{P}]\!] := (\mathsf{hat} : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop})$
Det $\longrightarrow$ kein	$[\![\mathbf{Det}]\!] := \lambda(p\ q : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop}).\ \neg\ \exists x.\ p\ x \land q\ x$
Det $\longrightarrow$ ein	$[\![\mathbf{Det}]\!] := \lambda(p\ q : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop}).\ \exists x.\ p\ x \land q\ x$
S $\longrightarrow$ **NP VP**	$[\![\mathbf{S}]\!] := [\![\mathbf{NP}]\!]\ [\![\mathbf{VP}]\!]$
NP $\longrightarrow$ **Det GNP**	$[\![\mathbf{NP}]\!] := [\![\mathbf{Det}]\!]\ [\![\mathbf{GNP}]\!]$
GNP $\longrightarrow$ **GN**	$[\![\mathbf{GNP}]\!] := [\![\mathbf{GN}]\!]$
GNP $\longrightarrow$ **GNP PP**	$[\![\mathbf{GNP}]\!] := (\lambda x.\ [\![\mathbf{GNP}]\!]\ x \land [\![\mathbf{PP}]\!]\ x)$
PP $\longrightarrow$ **P NP**	$[\![\mathbf{PP}]\!] := \lambda x.\ [\![\mathbf{NP}]\!]\ (\lambda y.\ [\![\mathbf{P}]\!]\ x\ y)$
VP $\longrightarrow$ **IV**	$[\![\mathbf{VP}]\!] := [\![\mathbf{IV}]\!]$

Statt der Regel „**NP** $\longrightarrow$ **Det GN**“ aus der Vorlesung schalten wir hier Gattungsnamen-Phrasen (**GNP**) dazwischen, um die Verwendung von Propositionen wie z.B. „mit“ zu erlauben.

Aufgabe 1.

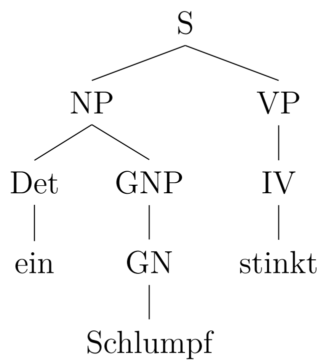
(a) Geben Sie einen Syntaxbaum für „ein Schlumpf stinkt“ und eine Schritt-für-Schritt-Berechnung von $[\![$ein Schlumpf stinkt$]\!]$ an (in β-reduzierter Form).

Bitte wenden!

(b) Geben Sie einen Syntaxbaum für den Satz „Kein Schlumpf mit einem Geschenk lacht“ und eine Schritt-für-Schritt-Berechnung von $[\![$kein Schlumpf mit einem Geschenk lacht$]\!]$ an (in β-reduzierter Form). Behandeln sie hierbei „einem“ als identisch mit „ein“.

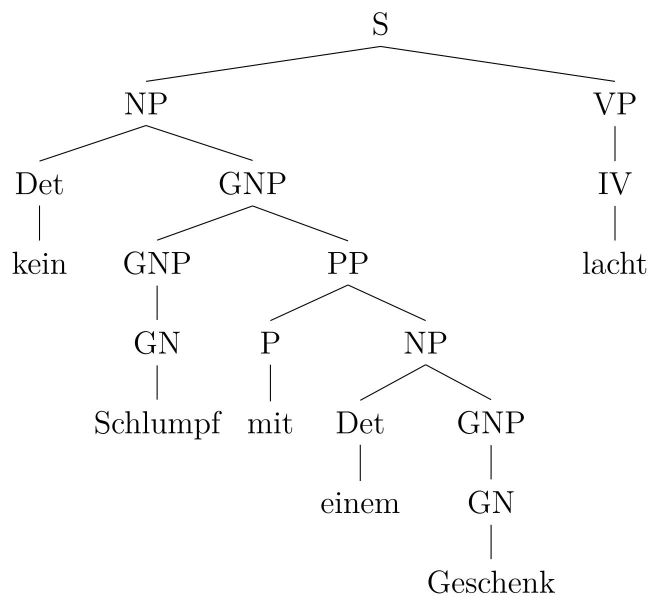
Lösung.

(a)



$$
\begin{aligned}
[\![\text{ein Schlumpf stinkt}]\!] &= [\![\text{ein Schlumpf}]\!]\ [\![\text{stinkt}]\!] \\
&= [\![\text{ein}]\!]\ [\![\text{Schlumpf}]\!]\ [\![\text{stinkt}]\!] \\
&= (\lambda p\ q.\ \exists x.\ p\ x \wedge q\ x)\ \mathsf{schlumpf}\ \mathsf{stinkt} \\
&\equiv \exists x.\ \mathsf{schlumpf}\ x \wedge \mathsf{stinkt}\ x
\end{aligned}
$$

(b)



$$
\begin{aligned}
&[\![\text{mit einem Geschenk}]\!] \\
&\quad = \lambda x.\ [\![\text{einem Geschenk}]\!]\ (\lambda y.\ [\![\text{mit}]\!]\ x\ y) \\
&\quad = \lambda x.\ [\![\text{einem}]\!]\ [\![\text{Geschenk}]\!]\ (\lambda y.\ [\![\text{mit}]\!]\ x\ y) \\
&\quad = \lambda x.\ (\lambda p\ q.\ \exists z.\ p\ z \wedge q\ z)\ \mathsf{geschenk}\ (\lambda y.\ \mathsf{hat}\ x\ y) \\
&\quad \equiv \lambda x.\ \exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge (\lambda y.\ \mathsf{hat}\ x\ y)\ z \\
&\quad \equiv \lambda x.\ \exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\![\text{kein Schlumpf mit einem Geschenk lacht}]\!] \\
&\quad = [\![\text{kein Schlumpf mit einem Geschenk}]\!]\ [\![\text{lacht}]\!] \\
&\quad = [\![\text{kein}]\!]\ [\![\text{Schlumpf mit einem Geschenk}]\!]\ [\![\text{lacht}]\!] \\
&\quad = [\![\text{kein}]\!]\ (\lambda u.\ [\![\text{Schlumpf}]\!]\ u \wedge [\![\text{mit einem Geschenk}]\!]\ u)\ [\![\text{lacht}]\!] \\
&\quad \equiv (\lambda p\ q.\ \neg\ \exists x.\ p\ x \wedge q\ x) \\
&\qquad (\lambda u.\ \mathsf{schlumpf}\ u \wedge (\lambda x.\ \exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z)\ u) \\
&\qquad \mathsf{lacht} \\
&\quad \equiv (\lambda p\ q.\ \neg\ \exists x.\ p\ x \wedge q\ x) \\
&\qquad (\lambda u.\ \mathsf{schlumpf}\ u \wedge (\exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ u\ z)) \\
&\qquad \mathsf{lacht} \\
&\quad \equiv \neg\ \exists x.\ \mathsf{schlumpf}\ x \wedge (\exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z) \wedge \mathsf{lacht}\ x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.

(a) Erweitern Sie das System um sinnvolle syntaktische und semantische Regeln, sodass der Satz „Sofia umarmt keinen Schlumpf“ die Bedeutung

$$\neg\exists x.\ \mathsf{schlumpf}\ x \wedge \mathsf{umarmt}\ \mathsf{sofia}\ x$$

erhält. Behandeln Sie hierbei „keinen“ als identisch mit „kein“.

(b) Geben Sie einen Syntaxbaum für „Sofia umarmt keinen Schlumpf“ und eine Schritt-für-Schritt-Berechnung von $[\![$Sofia umarmt keinen Schlumpf$]\!]$ an (in β-reduzierter Form). Achtung: Da „Sofia“ sowohl ein **EN** als auch eine **NP** ist, müssen wir $[\![$Sofia (**EN**)$]\!]$ und $[\![$Sofia (**NP**)$]\!]$ anstelle von $[\![$Sofia$]\!]$ schreiben, um die beiden unterscheiden zu können.

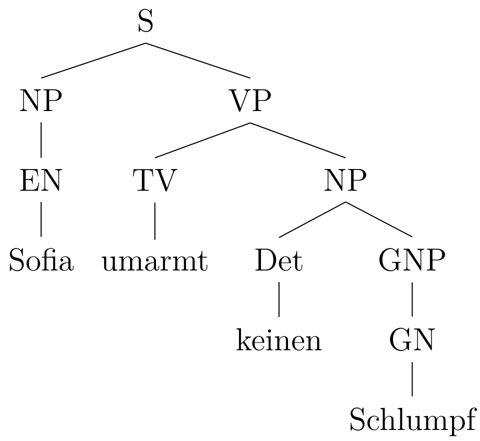
Lösung.

(a)

$$\mathbf{NP} \longrightarrow \mathbf{EN} \qquad \llbracket \mathbf{NP} \rrbracket := \lambda v.\ v\ \llbracket \mathbf{EN} \rrbracket$$

$$\mathbf{VP} \longrightarrow \mathbf{TV}\ \mathbf{NP} \qquad \llbracket \mathbf{VP} \rrbracket := \lambda x.\ \llbracket \mathbf{NP} \rrbracket\ (\llbracket \mathbf{TV} \rrbracket\ x)$$

(b)



$$
\begin{aligned}
&\llbracket \text{Sofia umarmt keinen Schlumpf} \rrbracket \\
&= \llbracket \text{Sofia } (\mathbf{NP}) \rrbracket\ \llbracket \text{umarmt keinen Schlumpf} \rrbracket \\
&= (\lambda v.\ v\ \llbracket \text{Sofia } (\mathbf{EN}) \rrbracket)\ \llbracket \text{umarmt keinen Schlumpf} \rrbracket \\
&= (\lambda v.\ v\ \llbracket \text{Sofia } (\mathbf{EN}) \rrbracket)\ (\lambda x.\ \llbracket \text{keinen Schlumpf} \rrbracket\ (\llbracket \text{umarmt} \rrbracket\ x)) \\
&= (\lambda v.\ v\ \llbracket \text{Sofia } (\mathbf{EN}) \rrbracket)\ (\lambda x.\ \llbracket \text{keinen} \rrbracket\ \llbracket \text{Schlumpf} \rrbracket\ (\llbracket \text{umarmt} \rrbracket\ x)) \\
&= (\lambda v.\ v\ \mathsf{sofia})\ (\lambda x.\ (\lambda p\ q.\ \neg\ \exists x.\ p\ x \wedge q\ x)\ \mathsf{schlumpf}\ (\mathsf{umarmt}\ x)) \\
&\equiv (\lambda x.\ (\lambda p\ q.\ \neg\ \exists x.\ p\ x \wedge q\ x)\ \mathsf{schlumpf}\ (\mathsf{umarmt}\ x))\ \mathsf{sofia} \\
&\equiv (\lambda p\ q.\ \neg\ \exists x.\ p\ x \wedge q\ x)\ \mathsf{schlumpf}\ (\mathsf{umarmt\ sofia}) \\
&\equiv \neg\ \exists x.\ \mathsf{schlumpf}\ x \wedge \mathsf{umarmt\ sofia}\ x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. Wir fügen den Determinierer „jeder“ hinzu:

$$\mathbf{Det} \longrightarrow \text{jeder}$$

(a) Geben Sie eine passende Semantik von „jeder“ an, sodass der Satz „jeder Schlumpf lacht“ die Bedeutung „$\forall x.\ \mathsf{schlumpf}\ x \rightarrow \mathsf{lacht}\ x$“ erhält.

(b) Wir fügen folgende Regel hinzu:

$$\mathbf{NP} \longrightarrow \text{es}$$

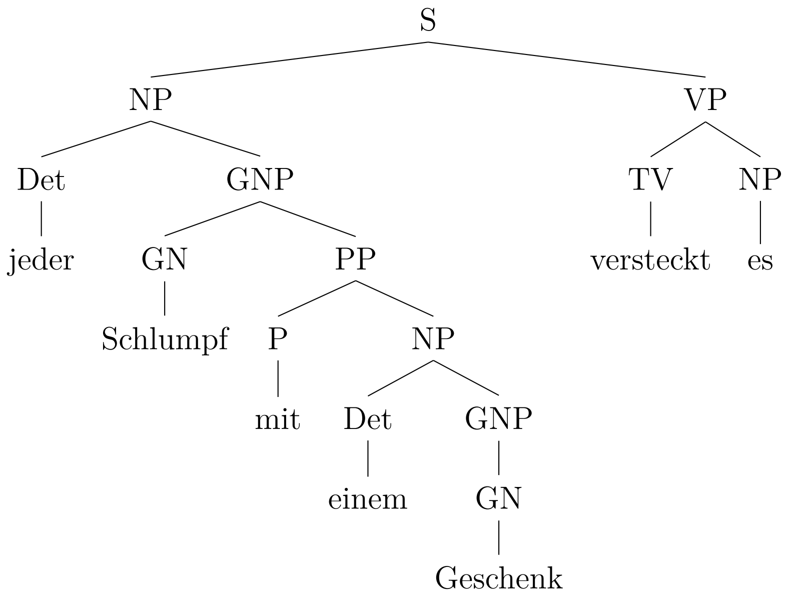
Geben Sie einen Syntaxbaum für „jeder Schlumpf mit einem Geschenk versteckt es“ und eine Schritt-für-Schritt-Berechnung von ⟦jeder Schlumpf mit einem Geschenk versteckt es⟧ an (in β-reduzierter Form). Lassen Sie hierbei die Berechnung von ⟦es⟧ zunächst offen. Sie benötigen die Regeln, die Sie in Aufgabe 2 hinzugefügt haben.

(c) Schreiben Sie den Implikationspfeil in dem Ergebnis aus b) mithilfe der Π-Notation. Geben Sie nun einen passenden Wert für ⟦es⟧ an. Sie dürfen hierbei eine Funktion $\mathsf{Exists.val} : \Pi\{p : \mathsf{Entity} \to \mathsf{Prop}\}.\ (\exists x.\ p\ x) \to \mathsf{Entity}$ annehmen, die uns für einen Beweis von $\exists x.\ p\ x$ dieses Element x liefert.

(a)

$$\textbf{Det} \longrightarrow \text{jeder} \qquad [\![\textbf{Det}]\!] := \lambda(p\ q : \mathsf{Entität} \to \mathsf{Prop}).\ \forall x.\ p\ x \to q\ x$$

(b)



In Aufgabe 1 haben wir festgestellt:

$$[\![\text{mit einem Geschenk}]\!]$$
$$\equiv \lambda x.\ \exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z$$

Nun:

$$
\begin{aligned}
&[\![\text{jeder Schlumpf mit einem Geschenk versteckt es}]\!] \\
&\quad = [\![\text{jeder Schlumpf mit einem Geschenk}]\!]\ [\![\text{versteckt es}]\!] \\
&\quad = [\![\text{jeder}]\!]\ [\![\text{Schlumpf mit einem Geschenk}]\!]\ [\![\text{versteckt es}]\!] \\
&\quad = [\![\text{jeder}]\!]\ (\lambda u.\ [\![\text{Schlumpf}]\!]\ u \wedge [\![\text{mit einem Geschenk}]\!]\ u)\ (\lambda x.[\![\text{es}]\!]\ ([\![\text{versteckt}]\!]\ x)) \\
&\quad \equiv (\lambda p\ q.\ \forall x.\ p\ x \to q\ x) \\
&\qquad (\lambda u.\ \mathsf{schlumpf}\ u \wedge (\lambda x.\ \exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z)\ u) \\
&\qquad (\lambda y.[\![\text{es}]\!]\ (\mathsf{versteckt}\ y)) \\
&\quad \equiv (\lambda p\ q.\ \forall x.\ p\ x \to q\ x) \\
&\qquad (\lambda u.\ \mathsf{schlumpf}\ u \wedge (\exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ u\ z)) \\
&\qquad (\lambda y.[\![\text{es}]\!]\ (\mathsf{versteckt}\ y)) \\
&\quad \equiv \forall x.\ (\mathsf{schlumpf}\ x \wedge (\exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z)) \to [\![\text{es}]\!]\ (\mathsf{versteckt}\ x)
\end{aligned}
$$

(c) Mit Π-Notation lautet das Ergebnis aus b):

$$\forall x.\ \Pi h : (\mathsf{schlumpf}\ x \wedge (\exists z.\ \mathsf{geschenk}\ z \wedge \mathsf{hat}\ x\ z)).\ [\![\text{es}]\!]\ (\mathsf{versteckt}\ x)$$

Ein sinnvoller Wert für $[\![\text{es}]\!]$ ist dann $\lambda v.\ v\ (\mathsf{Exists.val}\ (\mathsf{And.right}\ h))$.

Abgabe: 23. Januar 2024, bis 16.30 Uhr auf Ilias
(Oder bei technischen Problemen per Email an `jon.eugster@hhu.de`)
Abgabe zu zweit ist erlaubt.