Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2025

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 1

Abgabe der Lösungen am 16.04.2025 in der Vorlesung, um 10.30 Uhr

Aufgaben 1.1 bis 1.4 sind Präsenzaufgaben für die erste Übungsstunde am 11.04.2025. Bitte bereiten Sie schriftliche Lösungen zu den letzten beiden Aufgaben 1.5 und 1.6 bis zur Vorlesung am 16.04.2025 vor; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/`.

Aufgabe 1.1

(a) Sei $\vartheta: V \to V$ ein linearer Endomorphismus eines Vektorraums V über einem Körper K. Zeigen Sie, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\vartheta^2 = \vartheta$;

(ii) $V = \mathrm{Bild}(\vartheta) \oplus \mathrm{Kern}(\vartheta)$ und $\vartheta|_{\mathrm{Bild}(\vartheta)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Bild}(\vartheta)}$;

Ist $\dim V < \infty$, so sind (i) und (ii) zudem äquivalent zu: V besitzt eine Basis $\mathfrak{B}$ dergestalt, daß die Koordinatenmatrix $[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ diagonal mit Diagonaleinträgen aus $\{0, 1\}$ ist.

Bemerkung. Ein linearer Endomorphismus ϑ mit den genannten Eigenschaften wird *Projektion* von V auf $\mathrm{Bild}(\vartheta)$ entlang $\mathrm{Kern}(\vartheta)$ genannt.

(b) Sei $\vartheta: V \to V$ ein linearer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem Körper K mit $\vartheta^2 = \mathrm{id}_V$, und sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zeigen Sie: $V = U \oplus W$ für

$$U = \mathrm{Eig}(\vartheta, 1) = \{v \in V \mid v\vartheta = v\} \quad \text{und} \quad W = \mathrm{Eig}(\vartheta, -1) = \{v \in V \mid v\vartheta = -v\},$$

und folglich existiert eine Basis $\mathfrak{B}$ für V dergestalt, daß $[\vartheta]_{\mathfrak{B}}$ diagonal mit Diagonaleinträgen aus $\{1, -1\}$ ist.

Aufgabe 1.2

Bestimmen Sie – bis auf Äquivalenz – alle 1- und 2-dimensionalen linearen Darstellungen der Kleinschen Vierergruppe $G \cong C_2 \times C_2$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 1.3

Sei G eine Gruppe, und K ein Körper. Seien (π, V_π) und (ϱ, V_ϱ) endlich-dimensionale Darstellungen von G über K, und weiter sei $n = \dim(\pi) = \dim(\varrho)$.
Erläutern Sie: Es gilt $\pi \cong \rho$ genau dann, wenn sich bzgl. geeigneter Basen in beiden Fällen ein und dieselbe Darstellung in Matrizenform $G \to \mathrm{GL}_n(K)$ ergibt.

Aufgabe 1.4

Sei $G \leq \mathrm{Sym}(6)$ eine Diedergruppe der Ordnung 12, und K ein Körper. Sei $\varrho: G \to \mathrm{GL}_6(K)$ die zugehörige Darstellung (mittels Permutationsmatrizen) auf dem Standardzeilenvektorraum K^6. Geben Sie in einer Tabelle explizit alle Elemente $g \in G$ (in Zykelschreibweise) und ihre Bilder $g\varrho \in \mathrm{GL}_n(K)$ an.

Aufgabe 1.5 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und K ein Körper. Zeigen Sie: Eine Darstellung (ϱ, V) von G ist genau dann die reguläre Darstellung, wenn es ein $v \in V$ dergestalt gibt, daß die Familie $(v.(g\varrho))_{g\in G}$ eine Basis für den K-Vektorraum V bildet.

Aufgabe 1.6 (4 Punkte)

Sei $G = \langle x \rangle \cong C_5$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 5. Betrachten Sie die reguläre Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_5(K)$ über $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$, die durch

$$e_1^x = e_1.(x\varrho) = e_2, \quad e_2^x = e_2.(x\varrho) = e_3, \quad \ldots, \quad e_4^x = e_4.(x\varrho) = e_5, \quad e_5^x = e_5.(x\varrho) = e_1,$$

gegeben ist, wobei $e_1, \ldots, e_5$ die Standardbasis des Vektorraums K^5 bezeichne. Beschreiben Sie jeweils alle Teildarstellungen von ϱ.

Hinweis. Verwenden Sie Ihre Kenntnisse bzgl. der linearen Algebra.

Zusatz.[1] Sei $G = \langle x \rangle \cong C_\infty$ eine unendliche zyklische Gruppe. Betrachten Sie die reguläre Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ über $\mathbb{C}$, wobei der (abzählbar) unendlich-dimensionale Vektorraum V die Basis $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ habe und

$$e_i^x = e_i.(x\varrho) = e_{i+1} \qquad \text{für } i \in \mathbb{Z}$$

gelte. Welche Teildarstellungen finden Sie? Gibt es einen $(G\varrho)$-invarianten Untervektorraum $U \neq \{0\}$, der außer $\{0\}$ und U keine weiteren $(G\varrho)$-invarianten Unterräume besitzt?[2]

[1] Der Zusatz regt zu sich anschließenden Überlegungen an, kann zusätzlich bearbeitet werden und wird nicht bepunktet.

[2] Solch ein Teilraum heißt eine irreduzible Komponente von (ϱ, V).