Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2025

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 25.04.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 2.1 und 2.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/`.

Definition. Eine Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe G auf einem Vektrorraum V heißt *treu*, falls $\mathrm{Kern}(\varrho) = 1$ ist.

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung 12. Seien

$$A = \begin{pmatrix} e^{\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

(a) Zeigen Sie: Durch die Vorgaben $(a\varrho_1, b\varrho_1) = (A, B)$, $(a\varrho_2, b\varrho_2) = (A^3, -B)$, $(a\varrho_3, b\varrho_3) = (-A, B)$, $(a\varrho_4, b\varrho_4) = (C, D)$ werden Darstellungen $\varrho_1, \dots, \varrho_4$ von G auf $V = \mathbb{C}^2$ festgelegt.

(b) Welche dieser Darstellungen sind treu, welche sind irreduzibel? Welche Paare von Darstellungen sind isomorph zueinander? – Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eine Darstellung über dem Körper $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Gibt es $g, h \in G$ mit $(g\varrho)(h\varrho) \neq (h\varrho)(g\varrho)$, so ist ϱ irreduzibel.

(b) Gilt die Umkehrung? – Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.3

Die Eigenschaften einer Darstellung, „treu“ (hinreichend groß) bzw. „irreduzibel“ (vergleichsweise klein) zu sein, konkurrieren gewissermaßen miteinander. Fallen Ihnen notwendige oder hinreichende Bedingungen ein, unter denen eine endliche Gruppe G eine treue irreduzible Darstellung über den komplexen Zahlen besitzt?[1]

Aufgabe 2.4

Sei G eine Gruppe, und seien (π, V), (ϱ, W) endlich-dimensionale Darstellungen von G über einem Körper K. Seien $e_1, \dots, e_m$ und $f_1, \dots, f_n$ Basen von V und W.
Begründen Sie (ausführlich): Es gibt genau eine Darstellung σ von G auf $V \otimes_K W$ mit der Eigenschaft

$$(e_i \otimes f_j)(g\sigma) = e_i(g\pi) \otimes f_j(g\varrho) \qquad \text{für } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \text{ und } g \in G.$$

Weiter erfüllt diese für alle elementaren Tensoren $v \otimes w$ und $g \in G$:

$$(v \otimes w)(g\sigma) = v(g\pi) \otimes w(g\varrho).$$

Hinweis. Definieren Sie zunächst σ als Abbildung $G \to \mathrm{End}(V \otimes_K W)$, in eindeutiger Weise. Prüfen Sie sodann die Gleichung für elementare Tensoren.

Bemerkung. Die Darstellung σ ist das in der Vorlesung ohne weitere Ausführungen vorgestellte Tensorprodukt $\pi \otimes \varrho$.

[1] Vollständig charakterisiert wurden derartige Gruppen unter anderem von K. Shoda in J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo 2 (1930) und von W. Gaschütz in Math. Nachr. 12 (1954).