Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2025

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 02.05.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 3.1 und 3.4 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/`.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei $\varrho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer Gruppe G über $\mathbb{C}$. Auf dem Darstellungsraum $W = V \otimes_{\mathbb{C}} V$ von $\sigma = \varrho \otimes \varrho$ wirkt eine lineare Involution T mit $(v_1 \otimes v_2)^T = v_2 \otimes v_1$ für Elementartensoren. Betrachten Sie die $\mathbb{C}$-Untervektorräume

$$S(W) = \{w \in W \mid w^T = w\} \quad \text{und} \quad A(W) = \{w \in W \mid w^T = -w\}.$$

(a) Zeigen Sie: $S(W)$ und $A(W)$ sind $G\sigma$-invariant, und es gilt $W = S(W) \oplus A(W)$. Folglich ist $\sigma = \sigma_{\mathrm{S}} \oplus \sigma_{\mathrm{A}}$ für entsprechende Teildarstellungen σ_{S} und σ_{A}.

(b) Bestimmen Sie Formeln für die Charaktere ψ, ψ_{S}, ψ_{A} der Darstellungen σ, σ_{S}, σ_{A} in Abhängigkeit von dem Charakter $\chi = \chi_\varrho$ der ursprünglichen Darstellung ϱ.

Hinweis. Versuchen Sie, die Charakterwerte $\psi_{\mathrm{S}}(g)$ und $\psi_{\mathrm{A}}(g)$, für $g \in G$, durch die Werte $\chi(g^m)$ geeigneter Potenzen g^m von g auszudrücken; nehmen Sie hierfür zunächst an, daß $g\varrho$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3.2

Sei $G = \langle x \rangle \cong C_5$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 5. Betrachten Sie die Darstellung $\varrho \colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf $V = \mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$x\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -w \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } w = (1+\sqrt{5})/2.$$

(a) Bestimmen Sie die $\varrho \otimes \varrho$ zugeordnete Darstellung in Matrixform bzgl. der aus den Elementartensoren von Standardbasisvektoren bestehenden Standardbasis für $V \otimes_{\mathbb{R}} V$.

(b) Zerlegen Sie die Darstellung $\varrho \otimes \varrho$ in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen; geben Sie für die beteiligten Teildarstellungen jeweils eine Basis für den Darstellungsraum und die zugehörige Darstellung in Matrixform an.

Hinweis. Analog zu Aufgabe 3.1 wirkt auf dem Darstellungsraum $V \otimes_{\mathbb{R}} V$ von $\varrho \otimes \varrho$ eine lineare Involution T mit $(v_1 \otimes v_2)^T = v_2 \otimes v_1$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(c) Berechnen Sie die Charaktere der Darstellungen ϱ, $\varrho \otimes \varrho$ sowie der irreduziblen Komponenten von $\varrho \otimes \varrho$ aus (b), und stellen Sie diese über Wertetabellen explizit dar.

Aufgabe 3.3

Bestimmen Sie jeweils den Charakter der Einsdarstellung $\mathbb{1}_G$ und der regulären Darstellung ϱ_{reg} einer endlichen Gruppe G über $\mathbb{C}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe G über dem Körper $\mathbb{C}$.

(a) Beschreiben Sie 'die' kanonische Darstellung $\varrho^*\colon G \to \mathrm{GL}(V^*)$ von G auf dem Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, abstrakt und mittels geeigneter Darstellungen in Matrixform.

(b) Wie verhalten sich die Charaktere χ_ϱ und χ_{ϱ^*} zueinander?

(c) Sei nun ϱ irreduzibel, und setze $\pi = \varrho^* \otimes \varrho$. Berechnen Sie $\langle \mathbb{1}_G, \chi_\pi \rangle$, wobei $\mathbb{1}_G$ den Charakter der Einsdarstellung bezeichnet, und interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis. In Teil (c) müssen Sie ggf. im Vorgriff Folgendes verwenden. Für Klassenfunktionen $\varphi, \psi\colon G \to \mathbb{C}$ wird $\langle \varphi, \psi \rangle = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \varphi(x)\overline{\psi(x)}$ definiert. Die in der Vorlesung ggf. noch zu besprechenden Orthogonalitästrelationen implizieren: Ist σ eine irreduzible Darstellung von G und π eine beliebige endlich-dimensionale Darstellung von G, so impliziert $\langle \chi_\sigma, \chi_\pi \rangle > 0$, daß π eine zu σ isomorphe Teildarstellung besitzt.