Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2025

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 09.05.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 4.2 und 4.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/`.

Aufgabe 4.1

Sei G eine endliche Gruppe, und sei ϑ ein Charakter von G mit $\vartheta(g) = 0$ für alle $g \in G \smallsetminus \{1\}$. Erläutern Sie: Dann ist $\vartheta = m.\chi_{\text{reg}}$ ein Vielfaches des Charakters der regulären Darstellung, wobei zudem $m = \vartheta(1)/|G| \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei $G = \text{Alt}(4)$ die alternierende Gruppe vom Grad 4.

(a) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von G; geben Sie jeweils einen Vertreter und die Größe an. – Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie alle irreduziblen Charaktere von G.

Hinweis. Bestimmen Sie zunächst die 1-dimensionalen Darstellungen von G. Betrachten Sie alsdann die natürliche 4-dimensionale Darstellung der Permutationsgruppe G und zerlegen Sie diese in irreduzible Summanden.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle Gruppen der Ordnung 12.

Hinweis. Verwenden Sie die Sylowschen Sätze; es ist wahrscheinlich zweckmäßig, die erste Fallunterscheidung nach der Anzahl der Sylow-3-Untergruppen zu treffen. Denken Sie dann an mögliche Zerlegungen als halbdirektes Produkt zweier Untergruppen. Für abelsche Gruppen dürfen Sie direkt den allgemeinen Klassifikationssatz anwenden.

Aufgabe 4.4

Bestimmen Sie die erweiterte Charaktertafel für die Gruppe

$$G = \langle a, b \mid a^6 = 1,\ a^3 = b^2,\ a^b = a^{-1} \rangle.$$

Geben Sie weiter zu jedem irreduziblen Charakter ϑ vom Grad $\vartheta(1) \geq 2$ eine explizite Matrixdarstellung ϱ mit $\chi_\varrho = \vartheta$ an.