

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 5

Abgabe der Lösungen bis zum 16.05.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 5.1 und 5.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Sei $G = H \times K$ eine endliche Gruppe, die sich als direktes Produkt von zwei Untergruppen schreiben läßt.

(a) Beweisen Sie direkt (ohne Charaktertheorie): $k(G) = k(H)k(K)$, wobei $k(X)$ die Anzahl der Konjugationsklassen einer Gruppe X bezeichnet.

(b) Bestimmen Sie die erweiterte Charaktertafeln für G in den konkreten Fällen

$$H = K = C_3 \quad \text{und} \quad H = C_3, K = \text{Sym}(3).$$

Aufgabe 5.2

Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 12.

(a) Bestimmen Sie einen Isomorphismus $\varphi: G \rightarrow \text{Sym}(3) \times C_2$. Berechnen Sie mittels dieser Zerlegung die erweiterte Charaktertafel von G .

(b) Bestimmen Sie über die Charaktertafel von G alle Normalteiler von G .

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Gruppe

$$G = \langle a_1, a_2, b \mid a_1^3 = a_2^3 = b^2 = [a_1, a_2] = 1, a_1^b = a_1^{-1}, a_2^b = a_2^{-1} \rangle.$$

(a) Erläutern Sie: $G \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$.

(b) Bestimmen Sie $[G, G]$ und $Z(G)$. Ist G auflösbar? Ist G sogar nilpotent?

(c) Berechnen Sie die erweiterte Charaktertafel von G und folgern Sie: G besitzt keine treue¹ irreduzible Darstellung über $\mathbb{C}$.

Hinweis. Welche echten Faktorgruppen besitzt G ? Konstruieren Sie über diese möglichst viele irreduzible Charaktere.

Aufgabe 5.4

Welche der folgenden Eigenschaften einer endlichen Gruppe G lassen sich alleine anhand der Charaktertafel von G feststellen bzw. ausschließen? – Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Gruppe G hat ungerade Ordnung.

(b) Die Gruppe G ist perfekt.

(c) Die Gruppe G ist auflösbar.

(d) Die Gruppe G zerlegt sich als ein direktes Produkt $G = H \times K$ mit nicht-trivialen Faktoren $H, K \neq 1$.

¹vgl. Definition auf Blatt 2