Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2025

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 6

Abgabe der Lösungen bis zum 23.05.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 6.2 und 6.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/`.

Aufgabe 6.1

(a) Sei G die Diedergruppe der Ordnung 8, konkret realisiert als

$$G = \langle (1\,2\,3\,4), (1\,4)(2\,3) \rangle \le \mathrm{Sym}(4).$$

Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ die Darstellung, die sich daraufhin durch Einschränkung der natürlichen Permutationsdarstellung ergibt. Zerlegen Sie den zugehörigen Charakter χ_ϱ als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von irreduziblen Charakteren von G.

Hinweis. Verwenden Sie die Ihnen bekannte Charaktertafel für $G \cong D_8$, die Sie einfach angeben und ohne weitere Erklärungen verwenden dürfen.

(b) Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 12. Berechnen Sie (unabhängig von Aufgabe 5.2) die erweiterte Charaktertafel von G, indem Sie die Behandlung der Diedergruppen aus der Vorlesung in diesem speziellen Fall konkret ausführen. Weisen Sie insbesondere nach, daß alle Einträge der Charaktertafel ganzzahlig sind.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und

$$G = \langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = [x,z] = [y,z] = 1,\ [x,y] = z \rangle.$$

(a) Zeigen Sie: Durch die Vorgaben

$$x\varphi = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \qquad y\varphi = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&1 \end{pmatrix}, \qquad z\varphi = \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$$

wird ein Isomorphismus φ von G auf eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ definiert.

(b) Bestimmen Sie $[G,G]$ und $Z(G)$. Folgern Sie: G ist nilpotent der Klasse 2.

(c) Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung über $\mathbb{C}$ mit $\dim(\varrho) \ge 2$. Zeigen Sie: $\dim(\varrho) = p$.

Hinweis. Gehen Sie ähnlich wie in der Behandlung der Diedergruppen in der Vorlesung vor. Überlegen Sie zuerst: $z\varrho = a.\mathrm{id}_V$, wobei $a \in \mathbb{C}$ eine primitive $p$te Einheitswurzel darstellt. Dann wählen Sie für $x\varrho$ einen Eigenvektor $v \in V$, mit Eigenwert $b \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Zeigen Sie: Für $0 \le j < p$ ist $v(y\varrho)^j$ ein Eigenvektor für $x\varrho$, mit Eigenwert $a^{-j}b$. Betrachten Sie den Untervektorraum, der von $v, v(y\varrho), \ldots, v(y\varrho)^{p-1}$ aufgespannt wird.

(d) Folgern Sie: Die irreduziblen Charaktere von G teilen sich auf in p^2 lineare Charaktere und $p-1$ irreduzible Charaktere vom Grad p.

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz von Landau: Für jede vorgegebene Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt es – bis auf Isomorphie – nur endlich viele endliche Gruppen G mit $|\mathrm{Irr}(G)| = k$.

Hinweis. Verwenden Sie die Klassengleichung

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(g_i)|,$$

wobei $g_1, \ldots, g_k$ ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen von G bildet.

(b) Bestimmen Sie für $k \in \{1, 2, 3\}$ jeweils alle endlichen Gruppen G mit $|\mathrm{Irr}(G)| = k$.

Aufgabe 6.4

Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$G = \langle a, b \mid a^{2n} = 1,\ a^n = b^2,\ a^b = a^{-1} \rangle,$$

die *dizyklische Gruppe* der Ordnung $4n$.

(a) Verifizieren Sie, daß sich jedes Element $g \in G$ in der Form $g = b^i a^j$ mit $i \in \{0, 1\}$ und $j \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$ schreiben läßt, und folgern Sie, daß zumindest $|G| \leq 4n$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Für jede $2n$te Einheitswurzel $z \in \mathbb{C}$ läßt sich mittels

$$a\varrho = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z^n & 0 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ festlegen. Folgern Sie insbesondere: $|G| = 4n$.

(c) Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle irreduziblen Darstellungen von G.

(d) Berechnen Sie die erweiterte Charaktertafel von G.

Hinweis. Gehen Sie prinzipiell wie bei der Beschreibung der irreduziblen Darstellungen und der Charaktertafeln der Diedergruppen vor. Insbesondere ist es hilfreich, die Fälle $n \equiv_2 0$ und $n \equiv_2 1$ zu unterscheiden.

Bemerkung. Offenbar gibt es einen surjektiven Homomorphismus von der dizyklischen Gruppe G der Ordunung $4n$ auf die Diedergruppe der Ordnung $2n$. Einen beachtlichen Teil der irreduziblen Darstellungen kennen Sie also eigentlich bereits; Sie können die Aufgabe aber ohne direkten Gebrauch dieses Vorwissen lösen.