Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis zum 30.05.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 7.1 und 7.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie direkt aus der Definition des Ganzheitsbegriffs: Eine rationale Zahl ist genau dann ganz, wenn sie ganzzahlig ist; also: $\{a \in \mathbb{Q} \mid a \text{ ganz}\} = \mathbb{Z}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Begründen Sie: a ist genau dann ganz, wenn das Minimalpolynom $f = \text{Minpol}_{\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Q}[X]$ von a über $\mathbb{Q}$ bereits in $\mathbb{Z}[X]$ liegt.

(c) Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der zugehörige quadratische Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Ganzheitsring von K .

Hinweis. Offenbar liegt $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ im Ganzheitsring. Verwenden Sie nun (b), um zu klären, welche Elemente zusätzlich ganz sind. Dabei hilft es, die Fälle $d \equiv_4 1$ und $d \not\equiv_4 1$ zu unterscheiden.

Aufgabe 7.2

Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| \equiv_2 1$, und sei $\vartheta \in \text{Irr}(G)$ reellwertig, also $\vartheta = \bar{\vartheta}$.

(a) Erläutern Sie: G ist die disjunkte Vereinigung von $\{1\}$ und $(|G| - 1)/2$ geeigneten 2-elementigen Teilmengen der Form $\{g, g^{-1}\}$.

(b) Zeigen Sie: Es existiert eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$\langle \vartheta, \mathbb{1}_G \rangle = \frac{1}{|G|}(\vartheta(1) + 2a).$$

(c) Folgern Sie aus (b): Es gilt $\vartheta = \mathbb{1}_G$.

Bemerkung. Wir erhalten einen alternativen Beweis für Korollar 3.16 der Vorlesung.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, und sei $\sigma \in \text{Alt}(n)$. Zeigen Sie: Die $\text{Alt}(n)$ -Konjugationsklasse von σ ist gleich der $\text{Sym}(n)$ -Konjugationsklasse von σ genau dann, wenn σ mit wenigstens einem Element $\tau \in \text{Sym}(n) \setminus \text{Alt}(n)$ kommutiert. Gibt es kein solches Element, so zerfällt die $\text{Sym}(n)$ -Konjugationsklasse von σ in zwei $\text{Alt}(n)$ -Konjugationsklassen gleicher Länge, nämlich diejenigen von σ und $\sigma^{(12)}$.

(b) Bestimmen Sie für $n \in \{5, 6, 7\}$ explizit eine Liste der Konjugationsklassen in $\text{Alt}(n)$, inklusive Vertreter und jeweiliger Länge.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4

Eine endliche Gruppe G ist eine *Spaßvogelgruppe* („funny group“ nach T. Y. Lam), falls die dem Grad nach geordneten irreduziblen Charaktere $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ von G genau die Grade $\vartheta_1(1) = 1, \vartheta_2(1) = 2, \dots, \vartheta_k(1) = k$ haben.

Wir nennen eine endliche Gruppe G eine *Fast-Spaßvogelgruppe*, falls die dem Grad nach geordneten irreduziblen Charaktere $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ von G , bis auf höchstens eine Ausnahme, die entsprechenden Grade haben: Es existiert ein $d \in \{1, \dots, k\}$ mit der Eigenschaft

$$\vartheta_j(1) = j \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{d\}.$$

Beispiel. Die Gruppe $G = \text{Sym}(3)$ hat drei irreduzible Charaktere $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$; dem Grad nach geordnet liefern diese das Gradtupel $(1, 1, 2)$, welches mit $(1, 2, 3)$ nur in einer Position übereinstimmt. Die Gruppe ist daher weder eine Spaßvogelgruppe noch eine Fast-Spaßvogelgruppe, sondern höchstens eine „Quasi-Fast-Spaßvogelgruppe“.

(a) Bestimmen Sie alle Spaßvogelgruppen.

(b) Finden Sie zwei Fast-Spaßvogelgruppen, die keine (echten) Spaßvogelgruppen sind.

Hinweis. Aus Aufgabe 7.3 kennen Sie die Anzahl k der Konjugationsklassen von $\text{Alt}(5)$. Bestimmen Sie mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Einschränkungen die aufsteigend sortierten Grade $d_1 \leq \dots \leq d_k$ der irreduziblen Darstellungen von $\text{Alt}(5)$, ohne die vollständige Charaktertafel zu bestimmen. Es hilft, sich daran zu erinnern, daß eine Quadratzahl jeweils kongruent zu 0 oder 1 modulo 4 ist.