

## Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 8

Abgabe der Lösungen bis zum 06.06.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 8.3 und 8.4 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

[http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen\\_SS25/](http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/).

### Aufgabe 8.1

(a) Erläutern Sie: Eine Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist ganz (über  $\mathbb{Z}$ ) genau dann, wenn  $z$  Eigenwert einer quadratischen Matrix mit Einträgen aus  $\mathbb{Z}$  ist.

(b) Beweisen Sie das folgende Korollar aus der Vorlesung: Ist  $R$  ein kommutativer Erweiterungsring von  $\mathbb{Z}$ , mit  $1_R = 1_{\mathbb{Z}}$ , so ist  $S = \{r \in R \mid r \text{ ganz über } \mathbb{Z}\}$  ein Teilring von  $R$ .

*Hinweis.* Verwenden Sie entweder ein geeignetes Ganzheitskriterium aus der Vorlesung oder nutzen Sie alternativ (a) und das Kroneckerprodukt für Matrizen.

### Aufgabe 8.2

Die nachfolgenden Aussagen kennen Sie aus der Algebra-Vorlesung. Wiederholen Sie, was zum Ausdruck gebracht wird und die zugehörigen Beweisschritte.

Für  $m \in \mathbb{N}$  ist der  $m$ -te Kreisteilungskörper  $K_m$  der Zerfällungskörper von  $X^m - 1$  über  $\mathbb{Q}$ . Die Erweiterung  $K_m | \mathbb{Q}$  ist galoissch vom Grad  $\varphi(m)$ . Die Galoisgruppe  $\text{Gal}(K_m | \mathbb{Q})$  ist in natürlicher Weise isomorph zu der multiplikativen Gruppe  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . Ist nämlich  $z \in \mathbb{C}$  eine primitive  $m$ -te Einheitswurzel, z.B.  $z = \exp(2\pi i/m)$ , so gilt  $K_m = \mathbb{Q}(z)$ , und für  $a \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\text{ggT}(a, m) = 1$  wird über die Vorgaben  $z\sigma_a = z^a$  und  $\sigma_a|_{\mathbb{Q}} = \text{id}_{\mathbb{Q}}$  eindeutig ein Galoisautomorphismus  $\sigma_a \in \text{Gal}(K_m | \mathbb{Q})$  festgelegt. Dann liefert die Abbildung  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \rightarrow \text{Gal}(K_m | \mathbb{Q})$ ,  $a + m\mathbb{Z} \mapsto \sigma_a$  den erwähnten natürlichen Isomorphismus. Die *Galoiskonjugierten* eines Elementes  $x \in K_m$  über  $\mathbb{Q}$  sind definitionsgemäß die Bilder  $x\sigma_a$  unter den verschiedenen Galoisautomorphismen (gezählt ohne Vielfachheiten) bzw. äquivalent dazu die in  $K_m$  enthaltenen Wurzeln des Minimalpolynoms von  $x$  über  $\mathbb{Q}$ .

### Aufgabe 8.3

(4 Punkte)

(a) Beweisen Sie den folgenden Satz von Burnside: Sei  $G$  eine endliche Gruppe mit  $|G| \equiv_2 1$ , und sei  $k(G)$  die Anzahl der Konjugationsklassen von  $G$ . Dann gilt die Kongruenz

$$k(G) \equiv_{16} |G|.$$

*Hinweis.* Verwenden Sie unter anderem das Ergebnis aus Aufgabe 7.2.

(b) Folgern Sie: Ist  $G$  eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 27, so hat  $G$  genau 11 Konjugationsklassen. Verifizieren Sie, daß dies konsistent mit Aufgabe 6.2(d) ist.

(c) Zeigen Sie: Für  $p \in \mathbb{P}$ , gibt es neben der in Aufgabe 6.2 beschriebenen Gruppe der Ordnung  $p^3$  (mindestens) noch einen weiteren Isomorphietyp nicht-abelscher Gruppen der Ordnung  $p^3$ .

*Hinweis.* Die in Aufgabe 6.2 beschriebenen Gruppen haben den Exponenten  $p$ .

*Bemerkung.* Gruppen der Ordnung  $p^3$  lassen sich ohne Schwierigkeiten bis auf Isomorphie klassifizieren. Sie können dies – bei Interesse – zusätzlich in den Übungen besprechen.

Bitte wenden!

**Aufgabe 8.4**

(4 Punkte)

Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe. Die Gruppenalgebra  $\mathbb{C}H$  ist kanonisch eine Teilalgebra der Gruppenalgebra  $\mathbb{C}G$ , insbesondere ein  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum. Sei  $(\sigma, W)$  eine Teildarstellung der regulären Darstellung von  $H$  auf  $\mathbb{C}H$ , also  $W \leq \mathbb{C}H$  ein  $H$ -invarianter Untervektorraum und  $\sigma$  die zugehörige Darstellung von  $H$ . Sei  $V \leq \mathbb{C}G$  der kleinste  $G$ -invariante Untervektorraum, der  $W$  umfaßt, und  $\varrho$  die zugehörige Darstellung von  $G$ .

(a) Zeigen Sie: Dann ist  $(\varrho, V)$  induziert von  $(\sigma, W)$ .

(b) Seien nun konkret

$$G = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle \cong D_8 \quad \text{und} \quad H = \langle a^2, b \rangle \leq G.$$

Sei  $W = \mathbb{C}w \leq \mathbb{C}H$  für  $w = 1 - a^2 + b - a^2b$ . Überprüfen Sie, daß  $W$  ein  $H$ -invarianter Untervektorraum ist und somit eine Darstellung  $(\sigma, W)$  liefert. Bestimmen Sie den kleinsten  $G$ -invarianten Untervektorraum  $V \leq \mathbb{C}G$ , der  $W$  umfaßt, indem Sie eine Basis für diesen konstruieren, und berechnen Sie sowohl für  $\sigma$  als auch für die induzierte Darstellung  $\varrho$  den zugehörigen Charakter. Ist  $\varrho$  irreduzibel?