

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 9

Abgabe der Lösungen bis zum 13.06.2025 in der Übungsstunde

Aufgabe 9.1 ist schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/.

Aufgabe 9.1

(8 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist unter anderem die Bestimmung der erweiterten Charaktertafel der Gruppe $G = \text{Alt}(5)$. Als bekannt voraussetzen dürfen Sie vom Aufgabenblatt 7 her: Die Gruppe G hat fünf Konjugationsklassen, und die Grade der fünf irreduziblen Darstellungen von G sind:

$$\vartheta_1(1) = 1, \quad \vartheta_2(1) = 3, \quad \vartheta_3(1) = 3, \quad \vartheta_4(1) = 4, \quad \vartheta_5(1) = 5.$$

(a) Wählen Sie ein geeignetes Vertretersystem $g_1, \dots, g_5$ für die Konjugationsklassen von G und geben Sie $|C_G(g_i)|$ für $1 \leq i \leq 5$ an. Verifizieren Sie: Jedes Element $g \in G$ ist reell, d. h. konjugiert in G zu seinem Inversen g^{-1} .

(b) Bestimmen Sie ϑ_1 und ϑ_4 , d. h. die entsprechenden Zeilen der Charaktertafel.

Hinweis. Betrachten Sie die natürliche Permutationsdarstellung, um einen Charakter vom Grad 5 zu erhalten. Zerlegen Sie diesen dann in irreduzible Bestandteile.

(c) Bestimmen Sie die Charaktere $(\vartheta_4)_S, (\vartheta_4)_A$ für die zweite symmetrische Potenz und die zweite alternierende Potenz der Darstellung zu ϑ_4 . Zerlegen Sie diese als Summen von irreduziblen Charakteren und bestimmen Sie so insbesondere ϑ_5 .

Hinweis. Aus Aufgabe 3.1 sind für einen Charakter χ einer endlichen Gruppe G allgemein bekannt: $\chi_S(g) = (\chi(g)^2 + \chi(g^2))/2$ und $\chi_A(g) = (\chi(g)^2 - \chi(g^2))/2$ für alle $g \in G$.

(d) In natürlicher Weise ist $H = \text{Alt}(4)$ eine Untergruppe von G . Zeigen Sie: Es existiert ein Charakter ψ von H mit $\psi^G = \vartheta_5$. Können die fehlenden irreduziblen Charaktere ϑ_3, ϑ_4 ähnlich als induzierte Charaktere einer geeigneten Untergruppe konstruiert werden?

(e) Verwenden Sie die Spaltenorthogonalitätsrelationen, um ϑ_3, ϑ_4 – und damit die vollständige Charaktertafel von G – zu bestimmen.

(f) Verifizieren Sie anhand der Charaktertafel, daß G eine einfache Gruppe ist.

Aufgabe 9.2

Sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$. Seien $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ die verschiedenen irreduziblen Charaktere von G , und sei ψ ein irreduzibler Charakter von H .

Weiter sei $\psi^G = \sum_{i=1}^k m_i \vartheta_i$, mit Koeffizienten $m_i \geq 0$, die Zerlegung des induzierten Charakters ψ^G in irreduzible Komponenten. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^k m_i^2 \leq |G : H|.$$

Unter welchen Umständen gilt Gleichheit?

Hinweis. Verwenden Sie das Frobeniussche Reziprozitätsgesetz.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.3

Seien $H \leq K \leq G$ Gruppen, und seien $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ Darstellungen von H sowie $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ Darstellungen von G .

(a) Erläutern bzw. zeigen Sie die folgenden Aussagen aus Abschnitt 5 der Vorlesung, die dort ohne Beweis mitgeteilt wurden:

$$\operatorname{res}_H^G(\varrho_1 \oplus \varrho_2) \cong \operatorname{res}_H^G(\varrho_1) \oplus \operatorname{res}_H^G(\varrho_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{res}_H^K(\operatorname{res}_K^G(\varrho)) \cong \operatorname{res}_H^G(\varrho),$$

$$\operatorname{ind}_H^G(\sigma_1 \oplus \sigma_2) \cong \operatorname{ind}_H^G(\sigma_1) \oplus \operatorname{ind}_H^G(\sigma_2) \quad \text{und} \quad \operatorname{ind}_K^G(\operatorname{ind}_H^K(\sigma)) \cong \operatorname{ind}_H^G(\sigma).$$

Hinweis. Die Behauptungen zur Restriktion sehen Sie direkt ein. Für die Aussagen zu induzierten Darstellungen verwenden Sie deren allgemeine Definition aus Abschnitt 5. Für die letzte Behauptung hilft es, konkret Vertretersysteme $(s_i)_{i \in I}$ für die Nebenklassen von H in K und $(t_j)_{j \in J}$ für die Nebenklassen von K in G zu wählen.

(b) Seien nun $H \leq K \leq G$ endlich und betrachten Sie endlich-dimensionale Darstellungen von H bzw. G über $\mathbb{C}$. Formulieren und begründen Sie die Aussagen in (a) mit Hilfe der zugeordneten Charaktere.

Hinweis. Verwenden Sie die Formel für induzierte Charaktere aus Abschnitt 5.