

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 11

Abgabe der Lösungen bis zum 27.06.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 11.1 und 11.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/.

Aufgabe 11.1

(4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, und seien $H \leq G$ und $N \trianglelefteq G$.

(a) Zeigen Sie: Für den induzierten Charakter χ^G eines Charakters χ von H gilt stets

$$\text{Kern}(\chi^G) = \bigcap \{ \text{Kern}(\chi)^g \mid g \in G \}.$$

(b) Sei $\vartheta \in \text{Irr}(G)$ mit $\langle \vartheta_N, \mathbb{1}_N \rangle_N \neq 0$. Zeigen Sie: $N \leq \text{Kern}(\vartheta)$.

Hinweis. Sie können (a) verwenden.

Aufgabe 11.2

Finden Sie heraus, welche irreduziblen Charaktere der Gruppe $G = \text{Sym}(4)$ als induzierte Charaktere von einer echten Untergruppe gewonnen werden können und bestimmen Sie für diese jeweils eine Darstellung als induzierter Charakter.

Hinweis. Die Charaktertafel von $G = \text{Sym}(4)$ kennen Sie bereits aus der Vorlesung:

g_i	(1)	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)
$ C_G(g_i) $	24	4	3	8	4
ϑ_1	1	1	1	1	1
ϑ_2	1	-1	1	1	-1
ϑ_3	2	0	-1	2	0
ϑ_4	3	1	0	-1	-1
ϑ_5	3	-1	0	-1	1

Aufgabe 11.3

(4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und sei $\mathcal{H}$ die Menge aller zyklischen Untergruppen von G .

(a) Erklären Sie mit Hilfe der Resultate aus der Vorlesung:

$$I(G) = \{ d \in \mathbb{Z} \mid d\mathbb{1}_G = \sum_{H \in \mathcal{H}} a_H (\mathbb{1}_H)^G \text{ mit Koeffizienten } a_H \in \mathbb{Z} \}$$

ist ein von 0 verschiedenes Ideal von $\mathbb{Z}$.

(b) Der *Artinsche Exponent* der Gruppe G ist diejenige Zahl $a(G) \in \mathbb{N}$, für die $I(G) = a(G)\mathbb{Z}$ gilt; siehe (a).

Berechnen Sie den Artinschen Exponenten für die folgenden Gruppen:

$$G \cong C_m \text{ für } m \in \mathbb{N}, \quad G \cong C_2^m \text{ für } m \in \mathbb{N}, \quad G \cong D_8, \quad G \cong \text{Sym}(3).$$