

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 12

Abgabe der Lösungen bis zum 04.07.2025 in der Übungsstunde

Aufgaben 12.2 und 12.3 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/.

Aufgabe 12.1

Sei G eine endliche Gruppe, $A \leq G$ eine abelsche Untergruppe und $\vartheta \in \text{Irr}(G)$.

(a) Zeigen Sie: $\vartheta(1) \leq |G : A|$.

Hinweis. Betrachten Sie dazu eine Darstellung ϱ von G mit $\chi_\varrho = \vartheta$ und arbeiten Sie mit einer irreduziblen Teildarstellung σ von $\text{res}_A^G(\varrho)$.

(b) Illustrieren Sie durch ein geeignetes Beispiel, daß im allgemeinen $\vartheta(1)$ kein Teiler von $|G : A|$ zu sein braucht.

Hinweis. Wie in der Vorlesung gesehen, darf A dazu kein Normalteiler von G sein.

Aufgabe 12.2

(4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und χ ein treuer Charakter von G , also $\text{Kern}(\chi) = 1$. Sei weiter $r := |\{\chi(g) \mid g \in G\}|$ und $\vartheta \in \text{Irr}(G)$.

(a) Zeigen Sie: Für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, r\}$ kommt ϑ unter den irreduziblen Komponenten des Charakters χ^{j-1} vor.

Hinweis. Es genügt, zu zeigen, daß $\langle \chi^{j-1}, \vartheta \rangle$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, r\}$ ungleich 0 ist. Schreiben Sie dazu geeignet

$$|G| \cdot \left(\langle \chi^{j-1}, \vartheta \rangle \right)_{j=1}^r = \mathbf{b}_\vartheta \mathbf{A}_\chi$$

für einen Vektor $\mathbf{b}_\vartheta \in \mathbb{C}^r \setminus \{\mathbf{0}\}$ und eine Vandermonde-Matrix $\mathbf{A}_\chi \in \text{Mat}_r(\mathbb{C})$.

(b) Kommentieren Sie kurz den Spezialfall $\chi = \chi_{\text{reg}}$, der reguläre Charakter.

Aufgabe 12.3

(4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und χ ein Charakter von G , der nicht treu ist; es ist also $\text{Kern}(\chi) \neq 1$. Zeigen Sie: Es existiert $\vartheta \in \text{Irr}(G)$ dergestalt, daß für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\langle \chi^j, \vartheta \rangle = 0$.

Bemerkung. Die Aussage bildet ein passendes Gegenstück zu Aufgabe 12.2.