Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Doris Grothusmann, M.Sc.
Sommersemester 2025

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 13

Abgabe der Lösungen bis zum 11.07.2025 in der Übungsstunde

Beide Aufgaben 13.1 und 13.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_SS25/`.

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Die projektive spezielle lineare Gruppe $\mathrm{PSL}(2,7)$ ist die Faktorgruppe $\mathrm{SL}(2,7)/\{\mathrm{I},-\mathrm{I}\}$, wobei $\mathrm{SL}(2,7)$ die spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über einem Körper mit 7 Elementen bezeichnet.

(a) Finden Sie einen Isomorphismus von $\mathrm{PSL}(2,7)$ auf die Permutationsgruppe

$$G = \langle (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)(8),\ (1\,2\,4)(3\,6\,5)(7)(8),\ (1\,6)(2\,3)(4\,5)(7\,8) \rangle \le \mathrm{Sym}(8).$$

Folgern Sie: $\mathrm{PSL}(2,7)$ hat die Ordnung 168.

Hinweis. Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,7)$ operiert von links 2-transitiv auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1\mathbb{F}_7 = \mathbb{F}_7 \cup \{\infty\}$ mittels $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).z = (az+b)/(cz+d)$.

(b) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen der Gruppe $\mathrm{PSL}(2,7) \cong G$.

Hinweis. Sie sollten insgesamt sechs Klassen erhalten.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Sei $G = \mathrm{PSL}(2,7)$; vergleiche Aufgabe 13.1. Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der erweiterten Charaktertafel von G. Wir betrachten dazu

$$B = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}} \mid a \in \mathbb{F}_7^\times,\ b \in \mathbb{F}_7 \right\}.$$

(a) Übernehmen Sie die Konjugationsklassenvertreter $g_1, \ldots, g_6$ aus Aufgabe 13.1 und bestimmen Sie $|\mathrm{C}_G(g_i)|$ für $1 \le i \le 6$.

(b) Bestimmen Sie den induzierten Charakter $(\mathbb{1}_B)^G$ und zeigen Sie, daß sich dieser wie folgt zerlegt:

$$(\mathbb{1}_B)^G = \mathbb{1}_G + \chi \qquad \text{mit } \chi \in \mathrm{Irr}(G).$$

Hinweis. Was hat die Gruppe B mit der Wirkung von G auf der projektiven Geraden wie in Aufgabe 13.1(a) zu tun?

(c) Bestimmen Sie einen linearen Charakter $\lambda \ne \mathbb{1}_B$ von B, berechnen Sie den induzierten Charakter λ^G und zeigen Sie: $\lambda^G \in \mathrm{Irr}(G)$.

(d) Bestimmen Sie als nächstes den Charakter χ_{S} zu der zweiten symmetrischen Potenz der Darstellung mit Charakter χ. Zerlegen Sie χ_{S} in irreduzible Bestandteile und finden Sie so einen irreduziblen Charakter der Gruppe G vom Grad 6.

Hinweis. Dies ist ein ganz klein wenig komplizierter als in den bisherigen Aufgaben vom gleichem Typ.

Bitte wenden!

(e) Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen, um die erweiterte Charaktertafel von G zu vervollständigen.

Hinweis. Wieviele reelle Konjugationsklasse und daher reellwertige irreduzible Charktere gibt es?

(f) Beobachten Sie von der Charaktertafel, daß G eine einfache Gruppe ist.