Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

# Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 03.11.2022 in der Übung

Aufgaben 2.1 und 2.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_WS2223/`.

**Definition.** Eine Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ einer Gruppe $G$ auf einem Vektorraum $V$ heißt *treu*, falls $\mathrm{Kern}(\varrho) = 1$ ist. Die Darstellung $\varrho$ heißt *irreduzibel*, falls sie genau zwei Teildarstellungen erlaubt, nämlich die Nulldarstellung mit Darstellungsraum $\{0\}$ und sich selbst mit Darstellungsraum $V$.

**Aufgabe 2.1** (4 Punkte)

Sei $G = \langle a, b \mid a^6 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ eine Diedergruppe der Ordnung 12. Seien

$$A = \begin{pmatrix} e^{\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

(a) Zeigen Sie: Durch die Vorgaben $(a\varrho_1, b\varrho_1) = (A, B)$, $(a\varrho_2, b\varrho_2) = (A^3, -B)$, $(a\varrho_3, b\varrho_3) = (-A, B)$, $(a\varrho_4, b\varrho_4) = (C, D)$ werden Darstellungen $\varrho_1, \ldots, \varrho_4$ von $G$ auf $V = \mathbb{C}^2$ festgelegt.

(b) Welche dieser Darstellungen sind treu, welche sind irreduzibel? Welche Paare von Darstellungen sind isomorph zueinander? – Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2.2** (4 Punkte)

Sei $G$ eine endliche Gruppe, und $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ eine Darstellung über dem Körper $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Gibt es $g, h \in G$ mit $(g\varrho)(h\varrho) \neq (h\varrho)(g\varrho)$, so ist $\varrho$ irreduzibel.

(b) Gilt die Umkehrung? – Begründen Sie Ihre Antwort.

**Zusatz.** Die Eigenschaften einer Darstellung, „treu“ (hinreichend groß) bzw. „irreduzibel“ (vergleichsweise klein) zu sein, konkurrieren gewissermaßen miteinander. Fallen Ihnen notwendige oder hinreichende Bedingungen ein, unter denen eine endliche Gruppe $G$ eine treue irreduzible Darstellung über den komplexen Zahlen besitzt?[1]

[1] Vollständig charakterisiert wurden derartige Gruppen unter anderem von K. Shoda in J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo 2 (1930) und von W. Gaschütz in Math. Nachr. 12 (1954).