Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 10.11.2022 in der Übung

Aufgaben 3.1 und 3.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_WS2223/.`

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe, und seien (π, V), (ϱ, W) endlich-dimensionale Darstellugen von G über einem Körper K. Seien $e_1, \dots, e_m$ und $f_1, \dots, f_n$ Basen von V und W.
Begründen Sie (ausführlich): Es gibt genau eine Darstellung σ von G auf $V \otimes_K W$ mit der Eigenschaft

$$(e_i \otimes f_j)(g\sigma) = e_i(g\pi) \otimes f_j(g\varrho) \qquad \text{für } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \text{ und } g \in G.$$

Weiter erfüllt diese für alle elementaren Tensoren $v \otimes w$ und $g \in G$:

$$(v \otimes w)(g\sigma) = v(g\pi) \otimes w(g\varrho).$$

Hinweis. Definieren Sie zunächst σ als Abbildung $G \to \mathrm{End}(V \otimes_K W)$, in eindeutiger Weise. Prüfen Sie sodann die Gleichung für elementare Tensoren.

Bemerkung. Die Darstellung σ ist das in der Vorlesung ohne weitere Ausführungen vorgestellte Tensorprodukt $\pi \otimes \varrho$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei $G = \langle x \rangle \cong C_5$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 5. Betrachten Sie die Darstellung $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ auf $V = \mathbb{R}^2$, die durch

$$x\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -w \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } w = (1 + \sqrt{5})/2,$$

gegeben ist.
Bestimmen Sie $\varrho \otimes \varrho$ und zerlegen Sie diese Darstellung in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Hinweis. Auf dem Darstellungsraum $W = V \otimes_{\mathbb{R}} V$ von $\varrho \otimes \varrho$ wirkt eine lineare Involution T mit $(v_1 \otimes v_2)^T = v_2 \otimes v_1$ für elementare Tensoren. Starten Sie mit den $\mathbb{R}$-Untervektorräumen

$$S(W) = \{w \in W \mid w^T = w\} \quad \text{und} \quad A(W) = \{w \in W \mid w^T = -w\} \ \dots$$