Darstellungen endlicher Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 01.12.2022 (ehemals 17.11.2022) in der Übung

Aufgaben 4.1 und 4.2 sind schriftlich zu bearbeiten. Alle weiteren Informationen zu der Vorlesung finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/DarstEndlGruppen_WS2223/`.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Sei $\varrho: G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer Gruppe G über dem Körper $\mathbb{C}$. Auf dem Darstellungsraum $W = V \otimes_{\mathbb{C}} V$ von $\sigma = \varrho \otimes \varrho$ wirkt eine lineare Involution T mit $(v_1 \otimes v_2)^T = v_2 \otimes v_1$ für elementare Tensoren. Betrachten Sie die $\mathbb{C}$-Untervektorräume

$$S(W) = \{w \in W \mid w^T = w\} \quad \text{und} \quad A(W) = \{w \in W \mid w^T = -w\}.$$

(a) Zeigen Sie: $S(W)$ und $A(V)$ sind $G\sigma$-invariant, und es gilt $W = S(W) \oplus A(W)$. Folglich ist $\sigma = \sigma_{\mathrm{S}} \oplus \sigma_{\mathrm{A}}$ für entsprechende Teildarstellungen σ_{S} und σ_{A}.

(b) Bestimmen Sie Formeln für die Charaktere ψ, ψ_{S}, ψ_{A} der Darstellungen σ, σ_{S}, σ_{A} in Abhängigkeit von dem Charakter $\chi = \chi_\varrho$ der ursprünglichen Darstellung ϱ.

Hinweis. Versuchen Sie, die Charakterwerte $\psi_{\mathrm{S}}(g)$ und $\psi_{\mathrm{A}}(g)$, für $g \in G$, durch die Werte $\chi(g^m)$ geeigneter Potenzen g^m von g auszudrücken; nehmen Sie hierfür zunächst an, daß $g\varrho$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei $\varrho: G \to \mathrm{GL}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung einer endlichen Gruppe G über dem Körper $\mathbb{C}$.

(a) Beschreiben Sie 'die' kanonische Darstellung $\varrho^*: G \to \mathrm{GL}(V^*)$ von G auf dem Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, abstrakt und mittels geeigneter Darstellungen in Matrixform.

(b) Wie verhalten sich die Charaktere χ_ϱ und χ_{ϱ^*} zueinander?

(c) Sei nun ϱ irreduzibel, und setze $\pi = \varrho^* \otimes \varrho$. Berechnen Sie $\langle \mathbb{1}_G, \chi_\pi \rangle$, wobei $\mathbb{1}_G$ den Charakter der Einsdarstellung bezeichnet, und interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis. In Teil (c) müssen Sie im Vorgriff bereits folgendes verwenden. Für Klassenfunktionen $\varphi, \psi: G \to \mathbb{C}$ definiert man $\langle \varphi, \psi \rangle = |G|^{-1} \sum_{x \in G} \varphi(x) \overline{\psi(x)}$. Die Orthogonalitätsrelationen, die aktuell in der Vorlesung zu besprechen sind, implizieren: Ist σ eine irreduzible Darstellung von G und π eine beliebige endlich-dimensionale Darstellung von G, so impliziert $\langle \chi_\sigma, \chi_\pi \rangle > 0$, daß π eine zu σ isomorphe Teildarstellung besitzt.