Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 1

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 21.04.2020, Abgabe: Di., 28.04.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 1.1:** (Diskrete Metrik) (2+2+2+2+1 Punkte)
Wir betrachten eine nichtleere Menge E ausgestattet mit der durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \quad x, y \in E,$$

definierten *diskreten Metrik* $d : E \times E \to [0, \infty)$. Zeigen Sie:

(i) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ ist genau dann konvergent, wenn es einen Index gibt, ab dem sie konstant ist (d.h. wenn ein $a \in E$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $x_n = a$ für alle $n \geq n_0$).

(ii) E ist vollständig.

(iii) Eine Kugel $B(a,r) \subseteq E$ mit $r > 0$ und $a \in E$ ist entweder eine Einpunktmenge oder gleich dem gesamten Raum E.

(iv) Jede Teilmenge $A \subseteq E$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

(v) Sind M ein beliebiger metrischer Raum und $f : E \to M$, so ist f stetig.
Hinweis: Sind N, M metrische Räume und $f : N \to M$ eine Funktion, so kann Stetigkeit wie folgt definiert werden: Für jede offene Menge $U \subseteq M$ ist das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in N.

B **Aufgabe 1.2:** (Gewichteter Abstand) (3+3+3 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g \in C([a,b])$ mit $g(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Für $x, y \in C([a,b])$ sei

$$d_g(x,y) := \max_{a\leqslant t\leqslant b} |g(t)\,(x(t) - y(t))|\,.$$

Hier ist der Raum der stetigen Funktionen durch $C([a,b]) := \{x : [a,b] \to \mathbb{K};\, x \text{ stetig}\}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist, definiert.

(i) Zeigen Sie, dass d_g eine Metrik auf $C([a,b])$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass eine Folge in $C([a,b])$ genau dann konvergent bzgl. d_g ist, wenn sie gleichmäßig konvergent ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $C([a,b])$ ausgestattet mit der Metrik d_g vollständig ist.

Aufgabe 1.3: (Unendliches kartesisches Produkt)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei (M_n, d_n) ein metrischer Raum. Wir betrachten das unendliche kartesische Produkt

$$E := \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

ausgestattet mit

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1 + d_n(x_n,y_n)}, \qquad x, y \in E.$$

(i) Zeigen Sie, dass (E,d) ein metrischer Raum ist.

(ii) Zeigen Sie, dass Konvergenz in E gleichbedeutend mit komponentenweiser Konvergenz ist.

(iii) Zeigen Sie, dass E genau dann vollständig ist, wenn alle M_n vollständig sind.