Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 10

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 23.06.2020, Abgabe: Di., 30.06.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 10.1:** (Dual und Bidual) (4+4+4 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei E ein linearer Teilraum eines normierten Raums F. Dann gilt

$$E \overset{d}{\hookrightarrow} F \quad \Leftrightarrow \quad F' \hookrightarrow E',$$

wobei mit $F' \hookrightarrow E'$ gemeint ist, dass $F' \ni \ell \mapsto \ell|_E$ eine stetige Einbettung von F' nach E' definiert. Ist E reflexiv, so gilt sogar

$$E \overset{d}{\hookrightarrow} F \quad \Leftrightarrow \quad F' \overset{d}{\hookrightarrow} E'.$$

(ii) Satz 5.44 (a): Für normierte Räume E, F und $T \in \mathscr{L}(E, F)$ gilt

$$J_F \circ T \circ J_E^{-1} \subset T^{**},$$

d.h. $D(J_F \circ T \circ J_E^{-1}) \subset D(T^{**})$ und $(J_F \circ T \circ J_E^{-1})x = T^{**}x$ für $x \in D(J_F \circ T \circ J_E^{-1})$. Im Falle der Reflexivität von E und F gilt sogar

$$J_F \circ T \circ J_E^{-1} = T^{**}.$$

(iii) Satz 5.44 (d): Ist A ein linearer Teilraum eines normierten Raums E, so gilt

$$J_E \overline{A} \subset A^{\perp\perp}$$

und, falls E reflexiv ist, sogar

$$J_E \overline{A} = A^{\perp\perp}.$$

B **Aufgabe 10.2:** (Schwache und schwach*-Konvergenz) (3+3 Punkte)
Es seien E ein Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, die schwach gegen $x \in E$ konvergiert und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E', die schwach* gegen $\varphi \in E'$ konvergiert.

(i) Zeigen Sie, dass daraus nicht

$$\varphi_n(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(x)$$

folgen muss (Tipp: Einheitsvektoren).

(ii) Geben Sie Voraussetzungen an, unter denen doch auf die Konvergenz in (i) geschlossen werden kann.

Aufgabe 10.3: (Charakterisierung schwacher Konvergenz in $L^p(\Omega)$)
Seien $1 < p, p' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f_k \in L^p(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist schwach konvergent.

(ii) Für alle $g \in L^{p'}(\Omega)$ gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_\Omega g f_n dx \right| < \infty$ und für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ist $\int_\Omega f_n \varphi \, dx$ konvergent.

Sie können dabei ohne Begründung die Gültigkeit der Identifikation

$$L^p(\Omega)' = \left\{ \langle \cdot, g \rangle_{L^p, L^{p'}} \, ; \, g \in L^{p'}(\Omega) \right\}$$

mit dualer Paarung $\langle f, g \rangle_{L^p, L^{p'}} := \int_\Omega f g \, dx$ für $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ verwenden.