Übungsblatt 2

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 28.04.2020, Abgabe: Di., 05.05.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 2.1:** (6 Punkte)
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M$ eine Folge und $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$d(x_{k+1}, x_k) \leqslant \varepsilon_k.$$

Zeigen Sie, dass dann $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

B **Aufgabe 2.2:** (ℓ^p-Räume) (3+3+3+3 Punkte)
Seien $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

(i) Zeigen Sie für $p \leqslant q$ die stetige Einbettung $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$, d.h. zeigen Sie die Abschätzung

$$\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \qquad (x \in \ell^p).$$

Hinweis: Zeigen Sie die Abschätzung $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ zunächst nur für Folgen $x \in \ell^p$ mit $\|x\|_p = 1$.

(ii) Für $p < q$ sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ (wegen der Inklusion aus (i)) Normen auf ℓ^p. Zeigen Sie, dass die beiden Normen nicht äquivalent sind.

(iii) Zeigen Sie, dass ℓ^p für $p < \infty$ separabel ist.
Hinweis: Beachten Sie hierfür Bemerkung 2.29.

(iv) Zeigen Sie die echte Inklusion

$$\bigcup_{1\leqslant p<\infty} \ell^p \subsetneq c_0,$$

wobei c_0 den mit der Supremumsnorm ausgestatteten Raum aller Nullfolgen bezeichnet.

Aufgabe 2.3: (Beispiel 2.15b)
Zeigen Sie, dass $C([0, 2])$ ausgestattet mit der L^1-Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^2 |f(x)|\, dx$$

kein Banachraum ist.