Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 3

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 05.05.2020, Abgabe: Di., 12.05.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 3.1:** (Korollar 2.26) (9 Punkte)
Seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf M. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $A \subseteq M$ ist offen bezüglich d_1 genau dann, wenn $A \subseteq M$ offen bezüglich d_2 ist;

(ii) Für $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M$ und $x \in M$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} d_1(x_k, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} d_2(x_k, x) = 0.$$

B **Aufgabe 3.2:** (Supremum der Partialsummen als Norm auf ℓ^1) (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \qquad (x \in \ell^1)$$

eine Norm auf ℓ^1 definiert. Ist $(\ell^1, \|\cdot\|)$ ein Banachraum?

Aufgabe 3.3: (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)
Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : M \to N$ eine Funktionenfolge. Sei $f : M \to N$.
Zeigen Sie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf M gegen f genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ und $x \in M$

$$d_N(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

gilt.