Übungsblatt 4

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 12.05.2020, Abgabe: Di., 19.05.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 4.1:** (Stetige Inverse) (9+9 Punkte)
Seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator.

(i) Zeigen Sie, dass T genau dann eine auf $T(X)$ definierte stetige Inverse T^{-1} besitzt, wenn es $c > 0$ gibt, sodass

$$c \left\| x \right\|_X \leqslant \left\| Tx \right\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X.$$

(ii) Zeigen Sie, dass T genau dann *keine* auf $T(X)$ definierte stetige Inverse besitzt, wenn es eine Folge von Vektoren $x_1, x_2, \ldots \in X$ der Norm $\left\| x_n \right\|_X = 1$ gibt mit

$$Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aufgabe 4.2: (Beschränktheit und gleichmäßige Summierbarkeit in ℓ^1)
Eine Teilmenge $K \subseteq \ell^1$ heißt *gleichmäßig summierbar*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $x = (x_1, x_2, \ldots) \in K$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x_n| \leqslant \varepsilon$$

gilt.
Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $K \subseteq \ell^1$ genau dann präkompakt ist, wenn sie beschränkt und gleichmäßig summierbar ist.

Aufgabe 4.3: (Kompaktheit in c_0)
Sei K eine kompakte Teilmenge von c_0. Zeigen Sie, dass es dann $y \in c_0$ gibt, sodass für alle $x \in K$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leqslant y_n.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sup_{x\in K} |x_n|$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *endlich ist und untersuchen Sie die dadurch definierte Folge.*