Heinrich Heine
Universität
Düsseldorf

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 26.05.2020, Abgabe: Di., 02.06.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 6.1:** (Abgeschlossene Operatoren) (4+4 Punkte)

(i) Sei $1 \leq p < \infty$. Betrachten Sie den Operator

$$T : D(T) \subseteq L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad (Tf)(x) := x^2 f(x), \quad f \in D(T),\, x \in \mathbb{R},$$

wobei $D(T) := \{f \in L^p(\mathbb{R}) : [x \mapsto x^2 f(x)] \in L^p(\mathbb{R})\}$. Zeigen Sie, dass T abgeschlossen ist in $L^p(\mathbb{R})$.
Hinweis: Arbeiten Sie mit fast überall konvergenten Teilfolgen.

(ii) Betrachten Sie den Laplace-Operator

$$A : D(A) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \qquad Au := \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u,$$

wobei $D(A) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Beachten Sie Beispiel 2.15.

B **Aufgabe 6.2:** (Neumannsche Reihe und Wurzelkriterium) (2+3+3+2 Punkte)
Wir betrachten den durch

$$(Kf)(x) := \int_0^1 x f(t)\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

definierten Operator $K \in \mathscr{L}(C([0,1]))$, wobei $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm ausgestattet sei.

(i) Bestimmen Sie die Norm $\|K\|_{\mathscr{L}(C([0,1]))}$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \left\|K^k\right\|_{\mathscr{L}(C([0,1]))}^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{2}.$$

Hinweis: $\left(K^k f\right)(x)$ *kann explizit dargestellt werden.*

(iii) Zeigen Sie mit Satz 4.6, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^1 x f(t)\, dt = g(x), \qquad x \in [0,1],$$

für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt und dass f bezüglich der Supremumsnorm stetig von g abhängt.

(iv) Bestimmen Sie die Lösung aus (iii) explizit.

Aufgabe 6.3: (Stetige Fortsetzbarkeit)
Wir betrachten den Raum aller abbrechenden Folgen

$$c_{00} := \left\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\, a_n \neq 0 \text{ für nur endlich viele } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass c_{00} dicht im Folgenraum ℓ^1 ist.

(ii) Für jede Folge $a \in c_{00}$ bezeichne Ta das durch

$$(Ta)(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n, \qquad x \in [-1,1],$$

definierte Polynom. Lässt sich der dadurch definierte Operator

$$T : c_{00} \to C([-1,1])$$

stetig zu einem Operator $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\ell^1, C([-1,1]))$ fortsetzen? Falls ja, bestimmen Sie seine Operatornorm.