Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 7

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 02.06.2020, Abgabe: Di., 09.06.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 7.1:** (Bairescher Kategoriensatz) (4+4+4 Punkte)
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Beweisen Sie Satz 4.13 und Korollar 4.14, d. h.:

(i) Ist $A \subseteq M$ mager, so ist A^c fett und dicht im M.

(ii) Nichtleere offene Teilmengen von M sind fett.

(iii) Ist $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener dichter Teilmengen von M, so ist der Schnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

dicht in M.

B **Aufgabe 7.2:** (Stetige Inverse) (6 Punkte)
Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ injektiv. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $T^{-1} : T(X) \to X$ ist stetig;

(ii) $T(X)$ ist abgeschlossen in Y.

Aufgabe 7.3: (Divergente Neumannsche Reihe)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$K(x) := 2x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

definiert, wobei $\mathbb{R}^n$ mit der Supremumsnorm ausgestattet sei.

(i) Zeigen Sie, dass die zu K gehörige Neumannsche Reihe divergiert.

(ii) Ist $I - K$ stetig invertierbar?