Übungsblatt 8

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 09.06.2020, Abgabe: Di., 16.06.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 8.1:** (Satz von Hellinger-Toeplitz) (9 Punkte)
Sei H ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, falls

(S1) Für alle $x_1, x_2, y \in H$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle$ (linear im ersten Argument);

(S2) Für alle $x, y \in H$ gilt $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (hermitesch);

(S3) Für alle $0 \neq x \in H$ gilt $\langle x, x\rangle > 0$.

Ein Hilbertraum H ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \to \mathbb{K}$, der bzgl. der vom Skalarprodukt erzeugten Norm $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ für $u \in H$ vollständig ist. In der Vorlesung wird später gezeigt, dass das Skalarprodukt stetig in beiden Argumenten ist.

Sei H ein Hilbertraum. Ein linearer Operator $T : H \to H$ heißt symmetrisch, falls für alle $x, y \in H$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

gilt. Zeigen Sie, dass symmetrische lineare Operatoren stetig sind.

B **Aufgabe 8.2:** (Hahn-Banach) (9 Punkte)
Seien E ein normierter Raum und I eine Indexmenge. Seien $(x_i)_{i\in I} \subseteq E$ und $(c_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt $L \in E'$, sodass $L(x_i) = c_i$ für alle $i \in I$.

(ii) Es gibt $M \geq 0$, sodass für alle endlichen $F \subseteq I$ und alle $(\lambda_i)_{i\in F} \subseteq \mathbb{K}$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{i\in F} \lambda_i c_i\right| \leq M \left\|\sum_{i\in F} \lambda_i x_i\right\|$$

gilt.

Hinweis: Definieren Sie für (ii) $\Rightarrow$ (i) ein Funktional $\ell : G \to \mathbb{K}$, wobei $G := \mathrm{Lin}\{x_i : i \in I\}$ die lineare Hülle bezeichne, und wenden Sie den Satz von Hahn-Banach an.

Aufgabe 8.3: (Komposition und starke Konvergenz)
Seien X, Y, Z Banachräume. Es seien zwei Folgen von Operatoren $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X,Y)$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(Y,Z)$ und zwei Operatoren $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$ gegeben mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \quad (x \in X) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n y = Sy \quad (y \in Y)\,.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} S_n T_n x = STx \quad (x \in X)\,.$$