Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 9

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2020

Ausgabe: Di., 16.06.2020, Abgabe: Di., 23.06.2020

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 9.1:** (Momentenoperator) (3+2+4 Punkte)
Sei $T : L^1([0,1]) \to c_0$ definiert durch

$$(Tg)_n := \int_0^1 g(t)t^n dt, \qquad g \in L^1([0,1]),\, n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass T wie in der Definition behauptet tatsächlich nur Werte in c_0 annimmt.

(ii) Zeigen Sie, dass T stetig von $L^1([0,1])$ nach c_0 ist.

(iii) Geben Sie bezüglich der Identifikationen

$$c_0' = \left\{ \langle \cdot, x \rangle_{c_0,\ell^1} \,;\, x \in \ell^1 \right\}$$

mit dualer Paarung $\langle y, x\rangle_{c_0,\ell^1} := \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n$ für $y \in c_0$, $x \in \ell^1$ und

$$L^1([0,1])' = \left\{ \langle \cdot, f \rangle_{L^1,L^\infty} \,;\, f \in L^\infty([0,1]) \right\}$$

mit dualer Paarung $\langle g, f\rangle_{L^1,L^\infty} := \int_0^1 g(t)f(t)dt$ für $g \in L^1([0,1])$, $f \in L^\infty([0,1])$ eine Darstellung des adjungierten Operators $T^* : c_0' \to L^1([0,1])'$ an. Ein Beweis der Gültigkeit der beiden Identifikationen ist nicht gefordert.

B **Aufgabe 9.2:** (3+2+4 Punkte)
Seien E ein normierter Raum und $M, M_1, M_2 \subseteq E$ und $N, N_1, N_2 \subseteq E'$ nichtleer. Zeigen Sie folgenden Aussagen aus Lemma 5.35:

(i) $M^\perp$ bzw. ${}^\perp N$ sind abgeschlossene Unterräume von E' bzw. E.

(ii) $M_1 \subseteq M_2 \;\Rightarrow\; M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$; $\quad N_1 \subseteq N_2 \;\Rightarrow\; {}^\perp N_2 \subseteq {}^\perp N_1$.

(iii) $M^\perp = \{0\} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Lin}(M)$ ist dicht in E.

Aufgabe 9.3: (Eigenschaften eines Projektors)
Sei E ein Banachraum und $P \in \mathscr{L}(E)$ ein Projektor. Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus Satz 5.38:

(i) $E = N(P) \oplus R(P)$;

(ii) $P^* \in \mathscr{L}(E')$ ist ein Projektor, d.h. es gilt $E' = N(P^*) \oplus R(P^*)$;

(iii) $R(P)^\perp = N(P^*)$ und $N(P)^\perp = R(P^*)$;

(iv) $R(P)'$ ist isomorph zu $R(P^*)$ und $N(P)'$ ist isomorph zu $N(P^*)$.