

Einführung in die Funktionalanalysis

B Aufgabe 10.1: (Lemma 5.36) (3+3+3 Punkte)

Seien E ein normierter Raum und $M, M_1, M_2 \subseteq E$ und $N, N_1, N_2 \subseteq E'$ nichtleer. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

- (i) M^\perp bzw. ${}^\perp N$ sind abgeschlossene Unterräume von E' bzw. E .
- (ii) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2^\perp \subseteq M_1^\perp$; $N_1 \subseteq N_2 \Rightarrow {}^\perp N_2 \subseteq {}^\perp N_1$.
- (iii) $M^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{Lin}(M)$ ist dicht in E .

B Aufgabe 10.2: (Dualräume) (9 Punkte)

Sei E ein linearer Teilraum eines normierten Raums F . Zeigen Sie die folgenden Aussagen: Es gilt

$$E \xrightarrow{d} F \Leftrightarrow F' \hookrightarrow E'$$

wobei mit $F' \hookrightarrow E'$ gemeint ist, dass $F' \ni \ell \mapsto \ell|_E$ eine stetige Einbettung von F' nach E' definiert. Ist E reflexiv, so gilt sogar

$$E \xrightarrow{d} F \Leftrightarrow F' \xrightarrow{d} E'$$

Aufgabe 10.3: (Eigenschaften eines Projektors)

Sei E ein Banachraum und $P \in \mathcal{L}(E)$ ein Projektor. Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus Satz 5.39:

- (i) $E = N(P) \oplus R(P)$;
- (ii) $P^* \in \mathcal{L}(E')$ ist ein Projektor, d.h. es gilt $E' = N(P^*) \oplus R(P^*)$;
- (iii) $R(P)^\perp = N(P^*)$ und $N(P)^\perp = R(P^*)$;
- (iv) $R(P)'$ ist isomorph zu $R(P^*)$ und $N(P)'$ ist isomorph zu $N(P^*)$.