Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 11

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 21.06.2022, Abgabe: Di., 28.06.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 11.1:** (Dual und Bidual) (5+5 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Satz 5.45 (a): Für normierte Räume E, F und $T \in \mathscr{L}(E, F)$ gilt

$$J_F \circ T \circ J_E^{-1} \subset T^{**},$$

d.h. $D(J_F \circ T \circ J_E^{-1}) \subset D(T^{**})$ und $(J_F \circ T \circ J_E^{-1})x = T^{**}x$ für $x \in D(J_F \circ T \circ J_E^{-1})$. Im Falle der Reflexivität von E und F gilt sogar

$$J_F \circ T \circ J_E^{-1} = T^{**}.$$

(ii) Satz 5.45 (d): Ist A ein linearer Teilraum eines normierten Raums E, so gilt

$$J_E\overline{A} \subset A^{\perp\perp}$$

und, falls E reflexiv ist, sogar

$$J_E\overline{A} = A^{\perp\perp}.$$

B **Aufgabe 11.2:** (Schwache und schwach*-Konvergenz) (4+4 Punkte)
Es seien E ein Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, die schwach gegen $x \in E$ konvergiert und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E', die schwach* gegen $\varphi \in E'$ konvergiert.

(i) Zeigen Sie, dass daraus nicht

$$\varphi_n(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(x)$$

folgen muss (Tipp: Einheitsvektoren).

(ii) Geben Sie Voraussetzungen an, unter denen doch auf die Konvergenz in (i) geschlossen werden kann.

Aufgabe 11.3: (Charakterisierung schwacher Konvergenz in $L^p(\Omega)$)
Seien $1 < p, p' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f_k \in L^p(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist schwach konvergent.

(ii) Für alle $g \in L^{p'}(\Omega)$ gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\int_\Omega g f_n dx\right| < \infty$ und für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ist $\int_\Omega f_n\varphi\, dx$ konvergent.

Sie können dabei ohne Begründung die Gültigkeit der Identifikation

$$L^p(\Omega)' = \left\{\langle\cdot, g\rangle_{L^p,L^{p'}}\,;\, g \in L^{p'}(\Omega)\right\}$$

mit dualer Paarung $\langle f, g\rangle_{L^p,L^{p'}} := \int_\Omega fg\, dx$ für $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ verwenden.