Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 28.06.2022, Abgabe: Di., 05.07.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 12.1:** (Operator zu vorgegebenen Spektrum) (1+3+3+2 Punkte)
Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}$. Wir betrachten den durch

$$(Tx)_n := \lambda_n x_n, \qquad x \in \ell^p,\, n \in \mathbb{N},$$

definierten Operator $T : \ell^p \to \ell^p$.

(i) Überzeugen Sie sich davon, dass $T \in \mathscr{L}(\ell^p)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sigma_p(T) = \{\lambda_n;\, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) Zeigen Sie, dass $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n;\, n \in \mathbb{N}\}}$.

(iv) Zeigen Sie, dass es zu jeder nichtleeren kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{K}$ einen Operator T mit $\sigma(T) = K$ gibt.

B **Aufgabe 12.2:** (Multiplikationsoperatoren) (9 Punkte)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Bestimmen Sie alle Funktionen $a \in C(K)$, für die der Multiplikationsoperator

$$M_a : L^2(K) \to L^2(K), \quad f \mapsto af$$

kompakt ist.

Aufgabe 12.3: (Punktspektrum des adjungierten Operators und Spektralradius)

(i) Seien X ein Banachraum, $T \in \mathscr{L}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lambda \in \sigma_p(T^*) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{(\lambda - T)\,(X)} \neq X.$$

(ii) Seien X ein Banachraum und $S, T \in \mathscr{L}(X)$ mit $ST = TS$. Zeigen Sie, dass dann

$$r(ST) \leq r(S)r(T).$$

Aufgabe 12.4: (Lemma von Ehrling)
Seien X, Y und Z Banachräume, $S \in \mathscr{K}(X,Y)$ und $T \in \mathscr{L}(Y,Z)$. Sei T injektiv. Zeigen Sie, dass dann

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon > 0\ \forall x \in X : \quad \|Sx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|TSx\|_Z\,.$$

Hinweis: Widerspruchsbeweis.