Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 4

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 03.05.2022, Abgabe: Di., 10.05.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 4.1:** (Stetige Inverse) (4+4 Punkte)
Seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator.

(i) Zeigen Sie, dass T genau dann eine auf $T(X)$ definierte stetige Inverse T^{-1} besitzt, wenn es $c > 0$ gibt, sodass

$$c\left\|x\right\|_X \leqslant \left\|Tx\right\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X.$$

(ii) Zeigen Sie, dass T genau dann *keine* auf $T(X)$ definierte stetige Inverse besitzt, wenn es eine Folge von Vektoren $x_1, x_2, \ldots \in X$ der Norm $\left\|x_n\right\|_X = 1$ gibt mit

$$Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

B **Aufgabe 4.2:** (Folgenräume) (4+3+3 Punkte)

(i) Der lineare Operator $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ sei definiert durch

$$(Tx)_n := \frac{1}{n} x_n \qquad (x \in \ell^\infty).$$

Zeigen Sie, dass T injektiv und stetig mit $\left\|T\right\|_{\mathscr{L}(\ell^\infty)} = 1$ ist, jedoch nicht surjektiv.

(ii) Zeigen Sie, dass $T^{-1} : T(\ell^\infty) \to \ell^\infty$ aus (i) nicht stetig ist.

(iii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei der stetige lineare Operator $T_n : \ell^1 \to \ell^1$ definiert durch

$$(T_n x)_k := \begin{cases} x_k & \text{für } k \leq n, \\ 0 & \text{für } k > n, \end{cases} \qquad \left(x \in \ell^1\right).$$

Zeigen Sie, dass $T_n x \xrightarrow{n\to\infty} Ix$ in ℓ^1 für jedes $x \in \ell^1$, aber $T_n \nrightarrow I$ in $\mathscr{L}(\ell^1)$, wobei I die Identität auf ℓ^1 bezeichnet.

Aufgabe 4.3: (Arzelá-Ascoli)
Seien $-\infty < a < b < \infty$, $J = [a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ und $k \in C(J \times J, \mathbb{R})$. Sei

$$K : L^p(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R}), \qquad f \mapsto Kf(\cdot) := \int_a^{\cdot} k(\cdot, s) f(s)\, ds$$

der sogenannte Volterra-Operator. Zeigen Sie, dass das Bild der Einheitskugel

$$B_E := \{f \in L^p(J, \mathbb{R}) : \left\|f\right\|_p < 1\}$$

unter K, d.h. $K(B_E)$, relativ kompakt ist in $C(J, \mathbb{R})$.