Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 5

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 10.05.2022, Abgabe: Di., 17.05.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 5.1:** (Abgeschlossene Operatoren) (5+4 Punkte)

(i) Sei $1 \leq p < \infty$. Betrachten Sie den Operator

$$T : D(T) \subseteq L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}), \quad (Tf)(x) := x^2 f(x), \quad f \in D(T),\, x \in \mathbb{R},$$

wobei $D(T) := \{f \in L^p(\mathbb{R}) : [x \mapsto x^2 f(x)] \in L^p(\mathbb{R})\}$. Zeigen Sie, dass T abgeschlossen ist in $L^p(\mathbb{R})$.
Hinweis: Arbeiten Sie mit fast überall konvergenten Teilfolgen.

(ii) Betrachten Sie den Laplace-Operator

$$A : D(A) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \qquad Au := \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u,$$

wobei $D(A) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Beachten Sie Beispiel 2.15a).

B **Aufgabe 5.2:** (Stetige Fortsetzbarkeit) (4+5 Punkte)
Wir betrachten den Raum aller abbrechenden Folgen

$$c_{00} := \left\{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\, a_n \neq 0 \text{ für nur endlich viele } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass c_{00} dicht im Folgenraum ℓ^1 ist.

(ii) Für jede Folge $a \in c_{00}$ bezeichne Ta das durch

$$(Ta)(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n, \qquad x \in [-1, 1],$$

definierte Polynom. Lässt sich der dadurch definierte Operator

$$T : c_{00} \to C([-1, 1])$$

stetig zu einem Operator $\widetilde{T} \in \mathscr{L}(\ell^1, C([-1, 1]))$ fortsetzen? Falls ja, bestimmen Sie seine Operatornorm.

Aufgabe 5.3: (Banach-Algebren)
In dieser Aufgabe verstehen wir unter dem Produkt xy zweier Zahlenfolgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das gliedweise Produkt, d. h.

$$(xy)_n := x_n y_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass der Folgenraum ℓ^p durch gliedweise Multiplikation zu einer kommutativen Banachalgebra wird.
Für welche p handelt es sich um eine Banachalgebra mit Eins?