Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 17.05.2022, Abgabe: Di., 24.05.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 6.1:** (Neumannsche Reihe und Wurzelkriterium) (2+2+3+2 Punkte)
Wir betrachten den durch

$$(Kf)(x) := \int_0^1 x f(t)\, dt, \qquad x \in [0,1]\,,$$

definierten Operator $K \in \mathscr{L}(C([0,1]))$, wobei $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm ausgestattet sei.

(i) Bestimmen Sie die Norm $\|K\|_{\mathscr{L}(C([0,1]))}$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \left\|K^k\right\|_{\mathscr{L}(C([0,1]))}^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{2}.$$

Hinweis: $\left(K^k f\right)(x)$ *kann explizit dargestellt werden.*

(iii) Zeigen Sie mit Satz 4.6, dass die Integralgleichung

$$f(x) - \int_0^1 x f(t)\, dt = g(x), \qquad x \in [0,1]\,,$$

für jedes $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt und dass f bezüglich der Supremumsnorm stetig von g abhängt.

(iv) Bestimmen Sie die Lösung aus (iii) explizit.

B **Aufgabe 6.2:** (Bairescher Kategoriensatz) (3+3+3 Punkte)
Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum. Beweisen Sie Satz 4.13 und Korollar 4.14, d. h.:

(i) Ist $A \subseteq M$ mager, so ist A^c fett und dicht im M.

(ii) Nichtleere offene Teilmengen von M sind fett.

(iii) Ist $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener dichter Teilmengen von M, so ist der Schnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

dicht in M.

Aufgabe 6.3: (Divergente Neumannsche Reihe)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$K(x) := 2x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

definiert, wobei $\mathbb{R}^n$ mit der Supremumsnorm ausgestattet sei.

(i) Zeigen Sie, dass die zu K gehörige Neumannsche Reihe divergiert.

(ii) Ist $I - K$ stetig invertierbar?