Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 7

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 24.05.2022, Abgabe: Di., 31.05.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 7.1:** (Stetige Inverse) (9 Punkte)
Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ injektiv. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $T^{-1} : T(X) \to X$ ist stetig;

(ii) $T(X)$ ist abgeschlossen in Y.

B **Aufgabe 7.2:** (Satz von Hellinger-Toeplitz) (9 Punkte)
Sei H ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt, falls

(S1) Für alle $x_1, x_2, y \in H$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha \langle x_1, y\rangle + \beta \langle x_2, y\rangle$ (linear im ersten Argument);

(S2) Für alle $x, y \in H$ gilt $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (hermitesch);

(S3) Für alle $0 \neq x \in H$ gilt $\langle x, x\rangle > 0$.

Ein Hilbertraum H ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$, der bzgl. der vom Skalarprodukt erzeugten Norm $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ für $u \in H$ vollständig ist. In der Vorlesung wird später gezeigt, dass das Skalarprodukt stetig in beiden Argumenten ist.

Sei H ein Hilbertraum. Ein linearer Operator $T : H \to H$ heißt symmetrisch, falls für alle $x, y \in H$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

gilt. Zeigen Sie, dass symmetrische lineare Operatoren stetig sind.

Aufgabe 7.3: (Komposition und starke Konvergenz)
Seien X, Y, Z Banachräume. Es seien zwei Folgen von Operatoren $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(X, Y)$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(Y, Z)$ und zwei Operatoren $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y, Z)$ gegeben mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \quad (x \in X) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n y = Sy \quad (y \in Y)\,.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} S_n T_n x = STx \quad (x \in X)\,.$$