Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 8

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 31.05.2022, Abgabe: Di., 07.06.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 8.1:** (Hahn-Banach) (9 Punkte)
Seien E ein normierter Raum und I eine Indexmenge. Seien $(x_i)_{i\in I} \subseteq E$ und $(c_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt $L \in E'$, sodass $L(x_i) = c_i$ für alle $i \in I$.

(ii) Es gibt $M \geq 0$, sodass für alle endlichen $F \subseteq I$ und alle $(\lambda_i)_{i\in F} \subseteq \mathbb{K}$ die Ungleichung

$$\left|\sum_{i\in F} \lambda_i c_i\right| \leq M \left\|\sum_{i\in F} \lambda_i x_i\right\|$$

gilt.

Hinweis: Definieren Sie für (ii) $\Rightarrow$ (i) ein Funktional $\ell : G \to \mathbb{K}$, wobei $G := \mathrm{Lin}\{x_i : i \in I\}$ die lineare Hülle bezeichne, und wenden Sie den Satz von Hahn-Banach an.

B **Aufgabe 8.2:** (Stetige Fortsetzung) (3+3+3 Punkte)
Seien E ein Banachraum und $F \subseteq E$ ein linearer Unterraum. Seien $\Omega \neq \emptyset$ und $T \in \mathscr{L}(F, B(\Omega))$. Ziel von der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen T eine Fortsetzung $S \in \mathscr{L}(E, B(\Omega))$ mit Norm $\|S\|_{\mathscr{L}(E,B(\Omega))} = \|T\|_{\mathscr{L}(F,B(\Omega))}$ besitzt. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Seien $x \in \Omega$ fest und

$$\delta_x : B(\Omega) \to \mathbb{K}, \qquad f \mapsto \delta_x(f) := f(x).$$

Zeigen Sie, dass $\delta_x \in B(\Omega)'$.

(ii) Seien $x \in \Omega$ fest und

$$\ell_x : F \to \mathbb{K}, \qquad \ell_x := \delta_x \circ T.$$

Zeigen Sie, dass für ℓ_x eine Fortsetzung $L_x \in E'$ mit $L_x|_F = \ell_x$ und $\|L_x\|_{E'} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(F,B(\Omega))}$ existiert.

(iii) Zeigen Sie, dass T eine Fortsetzung $S \in \mathscr{L}(E, B(\Omega))$ mit $S|_F = T$ und Norm $\|S\|_{\mathscr{L}(E,B(\Omega))} = \|T\|_{\mathscr{L}(F,B(\Omega))}$ besitzt.

Aufgabe 8.3: (Starke und gleichmäßige Konvergenz)
Sei c_{00} der Raum der abbrechenden Folgen wie in Aufgabe 5.2. Geben Sie ein Beispiel einer Folge von Operatoren $(T_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}(c_{00})$ an mit

$$\lim_{m\to\infty} T_m x = 0 \qquad (x \in c_{00}),$$

aber $\sup_{m\in\mathbb{N}} \|T_m\|_{\mathscr{L}(c_{00})} = \infty$.
Widerspricht dies dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 4.20)?