Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 9

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui

Sommersemester 2022

Ausgabe: Di., 07.06.2022, Abgabe: Di., 14.06.2022

Einführung in die Funktionalanalysis

B **Aufgabe 9.1:** (Komplementäre Unterräume) (4+4+4 Punkte)
Seien E, F Banachräume, $U, V \subseteq E$ abgeschlossene Unterräume mit $E = U \oplus V$ und $T \in \mathscr{L}_{is}(E, F)$. Zeigen Sie:

(i) $T(U)$ ist abgeschlossen.

(ii) $T(U)$ is komplementär in F und es gilt $F = T(U) \oplus T(V)$.

(iii) Sei $P : E \to E$ der Projektor auf U entlang V bzgl. $E = U \oplus V$. Bestimmen Sie eine Darstellung des Projektors $Q : F \to F$ auf $T(U)$ entlang $T(V)$ in Termen von P und T.

B **Aufgabe 9.2:** (Korollar 5.18) (6 Punkte)
Sei F ein Teilraum des normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) F ist dicht in E;

(2) Aus $\ell \in E'$ mit $\ell|_F = 0$ folgt $\ell = 0$.

Aufgabe 9.3: (Momentenoperator)
Sei $T : L^1([0,1]) \to c_0$ definiert durch

$$(Tg)_n := \int_0^1 g(t)t^n dt, \qquad g \in L^1([0,1]),\ n \in \mathbb{N}.$$

(i) Zeigen Sie, dass T wie in der Definition behauptet tatsächlich nur Werte in c_0 annimmt.

(ii) Zeigen Sie, dass T stetig von $L^1([0,1])$ nach c_0 ist.

(iii) Geben Sie bezüglich der Identifikationen

$$c_0' = \left\{ \langle \cdot, x \rangle_{c_0, \ell^1} \, ; \, x \in \ell^1 \right\}$$

mit dualer Paarung $\langle y, x \rangle_{c_0,\ell^1} := \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n$ für $y \in c_0$, $x \in \ell^1$ und

$$L^1([0,1])' = \left\{ \langle \cdot, f \rangle_{L^1, L^\infty} \, ; \, f \in L^\infty([0,1]) \right\}$$

mit dualer Paarung $\langle g, f \rangle_{L^1,L^\infty} := \int_0^1 g(t)f(t)dt$ für $g \in L^1([0,1])$, $f \in L^\infty([0,1])$ eine Darstellung des adjungierten Operators $T^* : c_0' \to L^1([0,1])'$ an. Ein Beweis der Gültigkeit der beiden Identifikationen ist nicht gefordert.