Übungsblatt 1

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui, Elisabeth Reichwein
Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 08.10.2019, Abgabe: Di., 15.10.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 1.1:** (2+2+2 Punkte)
Formulieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen gemäß Definition 1.2 als

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{0\le|\alpha|\le k}) = 0, \qquad x \in G$$

für geeignete $n, m, l \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}_0$, ein geeignetes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ und eine geeignete Funktion

$$F : G \times (\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^l.$$

(i) $-\Delta u = f$, wobei $u, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(ii) $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$, wobei $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ und $\gamma \ge 1$.

(iii) $\operatorname{div} u = g$, wobei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Handelt es sich jeweils um eine lineare, semilineare, quasilineare oder voll nichtlineare Gleichung?

B **Aufgabe 1.2:** (6 Punkte)
Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^2(U)$ und $v \in (C^1(U))^n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$

(ii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

(iii) $\nabla \cdot (fv) = f\nabla \cdot v + v \cdot \nabla f$

(iv) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f$

B **Aufgabe 1.3:** (1+3+2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$u : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2-y^2)\ln\left|\ln\sqrt{x^2+y^2}\right|, & (x,y) \in B_1(0)\backslash\{0\} \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass u stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass u stetig partiell differenzierbar ist (d.h. $u \in C^1(B_1(0))$).

(iii) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen u_{xx} und u_{yy} auf $B_1(0)\backslash\{0\}$ existieren und keine stetige Fortsetzung in den Punkt 0 erlauben, wohingegen sich Δu stetig auf ganz $B_1(0)$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 1.4:
Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen. Ein Vektorfeld $V : G \to \mathbb{R}^3$ wird als quellenfrei bezeichnet, falls $\operatorname{div} V = 0$. Die Rotation eines Vektorfelds $V : G \to \mathbb{R}^3$ ist als

$$\operatorname{rot} V := \nabla \times V = \begin{pmatrix} \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass quellenfreie, hinreichend glatte elektrische/magnetische Felder $E, H : (0,\infty)\times G \to \mathbb{R}^3$, die den Maxwell-Gleichungen

$$E_t - \operatorname{rot} H = 0, \qquad H_t + \operatorname{rot} E = 0$$

in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ genügen, jeweils eine Wellengleichung erfüllen.