Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 10

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui, Elisabeth Reichwein

Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 10.12.2019, Abgabe: Di., 17.12.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 10.1:** (9 Punkte)
Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^2(G)$. Eine Funktion $u \in H^1(G)$ heiße schwache Lösung des Problems

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \qquad \text{in } G, \\ \partial_\nu u &= 0 \qquad \text{auf } \partial G, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wenn

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{in } \mathscr{D}'(G) \tag{2}$$

und

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle \qquad \text{für alle } \varphi \in H^1(G) \tag{3}$$

(vgl. Aufgabe 10.3). Zeigen Sie, dass (1) genau eine solche Lösung besitzt.

Hinweis: Hier bezeichnen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das $L^2(G)$-Skalarprodukt und ν die äußere Einheitsnormale an G.

Hinweis: Bedingung (3) scheint auf den ersten Blick sinnlos, da Δu auftaucht, u nach Voraussetzung aber nur in H^1 liegt. Wegen Bedingung (2) gilt aber $-\Delta u = f - u \in L^2(G)$.

Hinweis: Formen Sie (2) so um, dass sich der Rieszsche Darstellungssatz (Satz 7.5) in $H^1(G)$ anwenden lässt.

B **Aufgabe 10.2:** (9 Punkte)
Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Lösung $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$ von

$$\left(1 + \Delta^2\right) u = f \qquad \text{mit} \qquad \|u\|_{H^4(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

gibt.

Hinweis: Verwenden Sie Fourier-Transformation, den Satz von Plancherel (Lemma 5.5j) und Bemerkung 6.10d über Besselpotentialräume.

Hinweis: Der Operator Δ^2 ist durch $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{j,i=1}^n \partial_j^2 \partial_i^2 u$ definiert.

Aufgabe 10.3:
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und besitze einen C^1-Rand. Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in C^2(\overline{G})$ genau dann Neumann-Randwerte

$$\partial_\nu u(x) = 0 \qquad \text{für alle } x \in \partial G$$

besitzt, wenn

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle \qquad \text{für alle } \varphi \in H^1(G).$$

Hinweis: Verwenden Sie den Gaußschen Integralsatz und die Identität $\operatorname{div}(\varphi \nabla u) = \varphi \Delta u + \nabla u \nabla \varphi$.