# Übungsblatt 11

**Prof. Dr. Jürgen Saal**

**Christiane Bui, Elisabeth Reichwein**

**Wintersemester 2019/2020**

Ausgabe: Di., 17.12.2019, Abgabe: Di., 07.01.2020

## Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 11.1:** (6+6+6 Punkte)

Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_n > 0\}$ der Halbraum und $g = g_n$ die Grundlösung der Laplace-Gleichung aus Bemerkung 4.6(iii):

$$g_n : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

(i) Finden Sie für jeden Punkt $x \in H$ ein $\varphi^x \in C^2(H) \cap C^1(\overline{H})$, welches das Korrekturproblem (vgl. Def. 8.8)

$$\begin{cases} \Delta_y \varphi^x(y) &= 0, & \text{für } y \in H, \\ \varphi^x(y) &= g(y-x), & \text{für } y \in \partial H \end{cases}$$

löst. Sie können dazu die *Methode der Spiegelladungen* (siehe Bemerkung vor Satz 8.11) verwenden.

(ii) Sei nun $\varphi^x$ aus Teil (i). Davon ausgehend heißt

$$\Gamma(x,y) := g(x-y) - \varphi^x(y), \qquad x \in H,\, y \in \overline{H} \backslash \{x\}$$

die Greensche Funktion erster Art für den Halbraum $H$. Bestimmen Sie für $x \in H$ und $y \in \partial H$ die in der Darstellungsformel auftauchende negative Normalenableitung

$$-\frac{\partial}{\partial \nu_y} \Gamma(x,y) =: P(x,y).$$

Sie wird auch Poisson-Kern für den Halbraum genannt (vgl. Def. 8.13 und Lemma 8.9, beachten Sie aber, dass $H$ unbeschränkt).

*Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie an einem Punkt $y \in \partial H$ der äußere Einheitsnormalenvektor $\nu_y \in \mathbb{R}^n$ auf $H$ gegeben ist.*

(iii) Zeigen Sie für $n = 3$, dass der Poisson-Kern für den Halbraum aus Teil (ii) für jedes $x \in H$ die Gleichung

$$\int_{\partial H} P(x,y)\, dS(y) = 1$$

erfüllt (vgl. Lemma 8.14(b)).

*Hinweis: Sie können wie in Aufgabe 9.3 ausnutzen, dass der Rand des Halbraums die Identifizierung $\partial H \sim \mathbb{R}^{n-1}$ erlaubt.*

**Aufgabe 11.2:**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes $C^1$-Gebiet, zu dem es eine Greensche Funktion erster Art

$$\Gamma : \left\{(x,y) \in \Omega \times \overline{\Omega};\, y \neq x\right\} \to \mathbb{R}$$

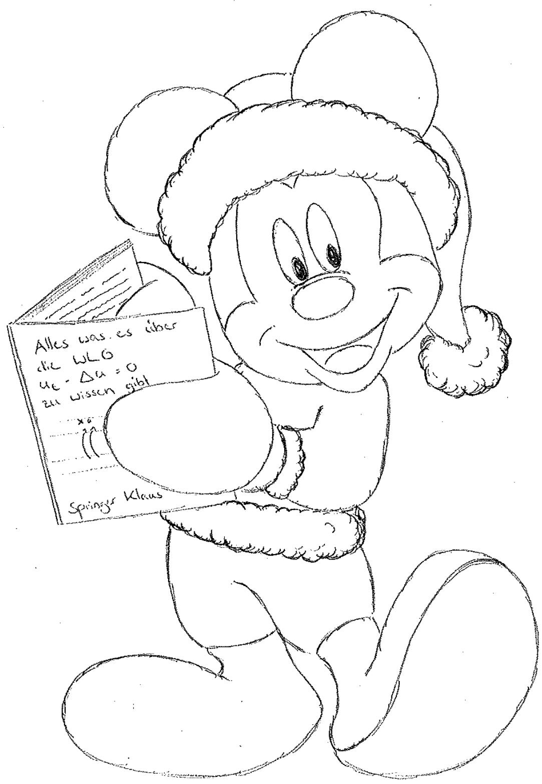
gibt. Zeigen Sie, dass diese symmetrisch ist, d. h. dass für alle $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$

$$\Gamma(x,y) = \Gamma(y,x)$$

gilt.

*Hinweis: Wenden Sie für $x, y \in \Omega$ mit $x \neq y$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ die zweite Greensche Formel (4-3) auf das Gebiet $G := \Omega \backslash \left(\overline{B(x,\varepsilon)} \cup \overline{B(y,\varepsilon)}\right)$ und die Funktionen $u : \overline{\Omega} \backslash \{x\} \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \Gamma(x,\xi)$ und $v : \overline{\Omega} \backslash \{y\} \to \mathbb{R},\ \xi \mapsto \Gamma(y,\xi)$ an.*

**Bitte wenden!**




**Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!**