Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui, Elisabeth Reichwein
Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 07.01.2020, Abgabe: Di., 14.01.2020

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 12.1:** (8 Punkte)
Sei $a < b$. Zeigen Sie, dass es $C > 0$ gibt, sodass für jede Funktion $u \in W_0^{1,2}(a,b)$ die Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leqslant C \, \|u'\|_{L^2(a,b)}$$

gilt.

Hinweis: Nutzen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

B **Aufgabe 12.2:** (10 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres, beschränktes C^1-Gebiet. Angenommen, es gibt zu jedem $x \in \Omega$ eine Funktion $\varphi^x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi^x(y) &= k & &\text{für } y \in \Omega, \\ \partial_\nu \varphi^x(y) &= \partial_\nu g(x-y) & &\text{für } y \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$k = \frac{1}{|\Omega|}$$

gelten muss. Angenommen, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$ ist mittelwertfrei (d. h. $\int\limits_\Omega u(y)dy = 0$) und löst das Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & &\text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u &= b & &\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(da mit u stets auch $u + C$ das Neumann-Problem löst, stellt die Annahme, u sei mittelwertfrei, keine Einschränkung dar). Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in \Omega$ die Darstellung

$$\begin{aligned} u(x) = &\int\limits_{\partial\Omega} \left(g(x-y) - \varphi^x(y)\right) b(y) dS(y) \\ &+ \int\limits_\Omega \left(g(x-y) - \varphi^x(y)\right) f(y) dy \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 12.3:
Sei $g = g_n$ die Grundlösung der Laplace-Gleichung aus Bemerkung 4.6(iii). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ die Funktion

$$\Omega \ni x \mapsto \int\limits_\Omega g(x-y) f(y) dy$$

partiell differenzierbar ist mit

$$\partial_j \int\limits_\Omega g(x-y) f(y) dy = \int\limits_\Omega \partial_j g(x-y) f(y) dy \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Hinweis: Fassen Sie im Differenzenquotienten die Integrale zusammen, schreiben Sie die so entstehende Differenz unter dem Integral mit dem Hauptsatz als (inneres) Integral, begründen Sie die Anwendbarkeit von Fubini und argumentieren Sie anschließend mit majorisierter Konvergenz.