Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 13

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui, Elisabeth Reichwein

Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 14.01.2020, Abgabe: Di., 21.01.2020

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 13.1:** (9 Punkte)
Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ und festes $t \geq 0$ definiere

$$(T(t)f)(r) = f(t+r), \qquad r \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie die gleichmäßige Beschränktheit der Familie $\{T(t) : t \geq 0\}$, d.h. zeigen Sie die Abschätzung

$$\|T(t)f\|_2 \leq C\|f\|_2$$

für ein $C > 0$ unabhängig von $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $t \geq 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass $T(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ für jedes $t \geq 0$ eine lineare, stetige Abbildung ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $T(t+s)f = T(t)T(s)f$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $t, s \geq 0$ gilt (Halbgruppeneigenschaft).

(iv) Zeigen Sie, dass $T(t)f \to f$ in $L^2(\mathbb{R})$ für $t \to 0$ und $f \in C_c(\mathbb{R})$ gilt (starke Stetigkeit).

B **Aufgabe 13.2:** (9 Punkte)
Für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichne

$$Pu = \mathscr{F}^{-1}(\sigma_P \hat{u})$$

die sogenannte Helmholtzprojektion mit $\sigma_P(\xi) = I - \frac{\xi\xi^T}{|\xi|^2}$ für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wobei I die Identitätsmatrix im $\mathbb{R}^n$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass $P : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist, d.h. zeigen Sie die Abschätzung

$$\|Pu\|_2 \leq C\|u\|_2$$

für ein $C > 0$ unabhängig von $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Plancherel (Lemma 5.5j).

(ii) Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist, d.h. zeigen Sie, dass $P^2u = Pu$ für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $P(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$, wobei

$$L^2_\sigma(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{div} u = 0\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Lemma 5.5e)+f).

Aufgabe 13.3:
Sei $T(t)$ für $t \geq 0$ wie in Aufgabe 13.1 definiert. Zeigen Sie, dass $u(t,x) := (T(t)f)(x)$ für $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ die Transportgleichung

$$\frac{d}{dt}u - \frac{d}{dx}u = 0, \quad u|_{t=0} = f$$

mit $u \in BC([0,\infty), L^2(\mathbb{R}))$ löst.
Hinweis: Sie können annehmen, dass die Aussage in Aufgabe 13.1(iv) für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt.