Übungsblatt 2

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui, Elisabeth Reichwein

Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 15.10.2019, Abgabe: Di., 22.10.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 2.1:** (3,5+3,5 Punkte)
Die Vektorfelder

$$a : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

seien gegeben durch

(i) $a(x, y) := (1, \alpha(x))$, wobei $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig,

(ii) $a(x, y) = (y, -x)$.

Bestimmen Sie jeweils alle Charakteristiken der Transportgleichung

$$a \cdot \nabla u = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

die auf $\{0\}\times\mathbb{R}$ starten und in $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ verlaufen, d. h. für jedes $(0, s) \in \{0\}\times\mathbb{R}$ die Lösung $\lambda : [0, T) \to [0,\infty)\times\mathbb{R}$ des Systems

$$\begin{aligned} (\lambda_1'(t), \lambda_2'(t)) &= a(\lambda_1(t), \lambda_2(t)) \\ \lambda(0) &= (0, s)\,. \end{aligned}$$

B **Aufgabe 2.2:** (4+4+3 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = 0, &\qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0, \cdot) = u_0, &\qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei $f, u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f''(v) > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass das obige Anfangswertproblem lokale C^1-Lösungen besitzt, d. h. dass zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ Zahlen $t^* > 0$ und $\epsilon^* > 0$ und eine Funktion $u \in C^1([0, t^*) \times (x_0 - \epsilon^*, x_0 + \epsilon^*))$, die das Anfangswertproblem löst, existieren.

Hinweis: Gewinnen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen für hinreichend kleine t^* und ϵ^* eine Lösung u der Gleichung

$$u(t, x) = u_0(x - tf'(u(t, x))), \qquad 0 \leqslant t < t^*,\ |x - x_0| < \epsilon^*,$$

und beweisen Sie, dass diese das Anfangswertproblem löst.

(ii) Zeigen Sie als Vorbereitung auf (iii), dass eine globale Lösung $u \in C^1([0,\infty)\times\mathbb{R})$ des Anfangswertproblems auf jeder der durch

$$\{(t, x^* + tf'(u_0(x^*)))\,;\, t \geqslant 0\} \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}, \qquad x^* \in \mathbb{R},$$

beschriebenen Halbgeraden konstant sein muss.

(iii) Beweisen Sie unter Zuhilfenahme von (ii), dass das Anfangswertproblem für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ keine globale Lösung $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ besitzt, wenn $u_0'(x_0) < 0$.

Hinweis: Finden Sie zwei Halbgeraden zu verschiedenen Startwerten, die einander schneiden.

Aufgabe 2.3:
Entscheiden Sie, ob die Transportgleichung

$$u_x + u_y = 1$$

eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ besitzt, die auf der Diagonalen $\{(x, y)\,,\, x = y\} \subset \mathbb{R}^2$ konstant ist.