Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 5

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui, Elisabeth Reichwein
Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 05.11.2019, Abgabe: Di., 12.11.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 5.1:** (10 Punkte)
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Folge von Distributionen $T_k \in \mathscr{D}'(G)$ heißt konvergent gegen eine Distribution $T \in \mathscr{D}'(G)$, wenn $T_k(\psi) \xrightarrow{k\to\infty} T(\psi)$ für alle Testfunktionen $\psi \in \mathscr{D}(G)$. Sei $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ ein Mollifier (vgl. Satz 3.5).

(i) Zeigen Sie, dass $\varphi_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} \delta_0$ in $\mathscr{D}'(G)$.

(ii) Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie, dass $\varphi_\delta * f \xrightarrow{\delta\to 0} f$ in $\mathscr{D}'(G)$.

Hinweis: Um in (i) und (ii) über Konvergenz in $\mathscr{D}'(G)$ sprechen zu können, fassen wir die Funktionen φ_δ, $\varphi_\delta * f$ und f dort als die von ihnen erzeugten Distributionen auf.

B **Aufgabe 5.2:** (8 Punkte)
Zeigen Sie, dass die durch die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

erzeugte Distribution $[g]$ eine Grundlösung zum Laplaceoperator $-\Delta$ ist.

Aufgabe 5.3:
Für Distributionen $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $\partial_i\partial_j T = \partial_j\partial_i T$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Wird eine reguläre Distribution T durch eine Funktion $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ erzeugt, so wird $\partial_i T$ durch $\partial_i u$ erzeugt für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Existieren nun zusätzlich die klassischen Ableitungen $\partial_i\partial_j u$ und $\partial_j\partial_i u$ für ein $1 \leqslant i \leqslant n$ und ein $1 \leqslant j \leqslant n$ mit $\partial_i\partial_j u, \partial_j\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, so werden $\partial_i\partial_j T$ bzw. $\partial_j\partial_i T$ durch $\partial_i\partial_j u$ bzw. $\partial_j\partial_i u$ erzeugt. Hierbei kann jedoch $\partial_i\partial_j u \neq \partial_j\partial_i u$ gelten.

Liegt hier ein Widerspruch vor?