Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui, Elisabeth Reichwein

Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 12.11.2019, Abgabe: Di., 19.11.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 6.1:** (8 Punkte)
Seien $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $u \in BC(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\Omega)$ mit

$$-\Delta u \leqslant 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\max_{x \in \mathbb{R}^2} u(x) = u(0).$$

Hinweis: Wenden Sie das Maximum-Prinzip auf die für $\varepsilon > 0$ durch

$$v_\varepsilon(x) := u(x) - \varepsilon \ln |x|, \qquad x \in \Omega$$

gegebene Funktion und das für $r > 1 > \rho > 0$ durch $\Omega_{\rho,r} := B_r(0) \setminus \overline{B_\rho(0)}$ definierte Gebiet an.

B **Aufgabe 6.2:** (2+2+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie Lemma 5.5 a), d. h. zeigen Sie für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, dass die Fouriertransformierte von $g(x) := f(x)e^{iax}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ durch $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

(ii) Zeigen Sie Lemma 5.5 b), d. h. zeigen Sie für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$, dass die Fouriertransformierte von $g(x) := f(x - a)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ durch $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-ia\xi}$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist.

(iii) Zeigen Sie Lemma 5.5 l), d. h. zeigen Sie für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\mathscr{F}(f * g)(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

B **Aufgabe 6.3:** (3 Punkte)
Zeigen Sie für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ die Einbettung

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n),$$

d.h. zeigen Sie $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ und dass die Identität $\iota : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n),\ f \mapsto f$ stetig ist (d.h. für eine Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \to 0$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\varphi_k \to 0$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $k \to \infty$).

Aufgabe 6.4:
Führen Sie den Grenzübergang im zweiten Schritt des Beweises von Satz 4.7 aus, d. h. zeigen Sie die folgende Aussage:
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$. Angenommen, für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für die durch

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{-x_1}$$

definierte Funktion $\max_{\overline{G}} u_\varepsilon = \max_{\partial G} u_\varepsilon$. Dann gilt $\max_{\overline{G}} u = \max_{\partial G} u$.