Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 7

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui, Elisabeth Reichwein
Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 19.11.2019, Abgabe: Di., 26.11.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 7.1:** (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ keine Teilmenge von $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ ist, indem Sie zeigen, dass die von der Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^x$ erzeugte Distribution keine temperierte Distribution ist.

B **Aufgabe 7.2:** (9 Punkte)
Seien $G(t,x) = (4\pi t)^{-1/2} \exp(-|x|^2/4t)$ der Wärmeleitungskern und $u_0(x) = e^x$. Zeigen Sie, dass die Faltung

$$u(t,\cdot) := G(t,\cdot) * u_0$$

auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ wohldefiniert und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$$

ist mit $u(t,\cdot) \xrightarrow{t \searrow 0} u_0$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7.3:
Zeigen Sie, dass der Cauchysche Hauptwert

$$PV(1/x)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{1}{x}\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

wohldefiniert und eine Distribution ist.