Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Übungsblatt 8

Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui, Elisabeth Reichwein
Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 26.11.2019, Abgabe: Di., 03.12.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 8.1:** (3 Punkte)
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\mathscr{F}(\delta_0)$ der Delta-Distribution $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

B **Aufgabe 8.2:** (6 Punkte)
Sei $T > 0$. Zeigen Sie, dass es $C = C(T) > 0$ gibt, sodass für alle $u_0 \in BC(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, alle $u_1 \in BC(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ und alle Lösungen $u \in BC([0,T] \times \mathbb{R}) \cap C^1([0,T) \times \mathbb{R}) \cap C^2((0,T) \times \mathbb{R})$ der Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t,x) - c^2 \partial_x^2 u(t,x) &= 0, && (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x), && x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) &= u_1(x), && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\|u\|_{BC([0,T]\times\mathbb{R})} \leqslant C \left(\|u_0\|_{BC(\mathbb{R})} + \|u_1\|_{BC(\mathbb{R})} \right)$$

der Lösung durch die Daten gilt.

B **Aufgabe 8.3:** (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist als

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > |x|, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

eine Grundlösung zum Operator $L = \partial_t^2 - \partial_x^2$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ ist.

Aufgabe 8.4:
In Aufgabe 7.3 wurde gezeigt, dass der Cauchysche Hauptwert

$$PV(1/x)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{1}{x} \varphi(x) dx, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

eine Distribution ist. Ist die Distribution regulär?