Übungsblatt 9

Prof. Dr. Jürgen Saal

Christiane Bui, Elisabeth Reichwein

Wintersemester 2019/2020

Ausgabe: Di., 03.12.2019, Abgabe: Di., 10.12.2019

Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

B **Aufgabe 9.1:** (5+5 Punkte)

Seien $-\infty < s < \infty$ und $J^s : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ gegeben als $J^s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(i) Das Bessel-Potential $\mathcal{J}^s : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{J}^s f = \mathscr{F}^{-1} J^s \mathscr{F} f$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Isomorphismus.

(ii) Das Bessel-Potential $\mathcal{J}^s : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{J}^s T = \mathscr{F}^{-1} J^s \mathscr{F} T$ für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Isomorphismus.

Hinweise:
Zu (i): Zeigen Sie zunächst, dass die Multiplikation $M : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $Mf = J^s f$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Isomorphismus ist.
Zu (ii): Für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ und J^s wie aus der Aufgabenstellung wird $J^s T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch $J^s T(f) := T(J^s f)$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert. Zeigen Sie dann zunächst, dass $M : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $M(T) = J^s T$ für $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Isomorphismus ist.
Ein linearer Operator $M : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig genau dann wenn für $(T_k)_k \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $T_k(f) \to 0$ folgt, dass $M(T_k)(f) \to 0$ für $k \to \infty$ für alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

B **Aufgabe 9.2:** (3+5 Punkte)

(i) Seien $1 \leq p < q \leq \infty$. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie die Einbettung

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega),$$

d.h. zeigen Sie für $f \in W^{1,q}(\Omega)$ die Abschätzung $\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{1,q}(\Omega)}$ für ein $C > 0$ unabhängig von f.

(ii) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ eine $W^{1,p}((-1, 1))$ Funktion ist.

Aufgabe 9.3:

Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass der lineare Operator (der sogenannte Spur-Operator)

$$\mathrm{tr} : C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n) \to C_c^\infty(\partial\mathbb{R}_+^n), \quad u \mapsto u|_{\partial\mathbb{R}_+^n}$$

einer Abschätzung der Form

$$\|\mathrm{tr}\, u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}_+^n)} \leq C\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}, \qquad u \in C_c^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^n)$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten $C > 0$ genügt.
Hinweis: Hier ist $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$ der Halbraum und sein Rand erlaubt die Identifizierung $\partial\mathbb{R}_+^n \sim \mathbb{R}^{n-1}$. Weiterhin ist $C_c^\infty(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_\Omega;\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.