Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Ilaria Castellano
Wintersemester 2024/25

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Gruppentheorie – Blatt 14

Keine schriftliche Abgabe der Lösungen

Die Aufgaben können zumindest teilweise in der letzten Übungsstunde besprochen werden. Zudem dienen sie – wie alle vorherigen Aufgaben – zum Testen des eigenen Verständnisses und so der Vorbereitung auf die mündliche Prüfung; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/EinfGruppen_WS2425/`.

Aufgabe 14.1

(a) Sei p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe und K ein Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass jede irreduzible Darstellung von G über K den Grad 1 hat.

Hinweis: Verwenden Sie, dass eine nicht-triviale endliche p-Gruppe stets ein nicht-triviales Zentrum besitzt.

(b) Sei p eine Primzahl und $G = \langle x \rangle \cong C_p$. Beschreiben Sie eine irreduzible Darstellung von G über $\mathbb{Q}$, die den Grad $p-1$ hat.

Aufgabe 14.2

Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Sei M ein einfacher KG-Modul. Zeigen Sie: Dann ist M isomorph zu einem KG-Modul der Form KG/I, wobei KG per Rechtsmultiplikation als KG-Modul betrachtet wird und I ein geeignetes maximales Rechtsideal von KG bezeichnet (und so als KG-Untermodul von KG betrachtet werden kann).

Aufgabe 14.3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \langle x \rangle \cong C_n$.

(a) Bestimmen Sie, bis auf Äquivalenz, alle irreduziblen Darstellungen von G über $\mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie für die komplexe Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$:

$$\mathbb{C}G \cong \underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Aufgabe 14.4

Bestimmen Sie, bis auf Äquivalenz, alle irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathrm{Sym}(3)$ über dem Körper $\mathbb{C}$.