

## Einführung in die Topologie, SoSe 25 Blatt 2

---

### Aufgabe 1 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}$  genau dann homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist, wenn  $n = 1$  ist.

### Aufgabe 2 (8 Punkte):

Seien  $X$  und  $Y$  zwei topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende sechs Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die Abbildung  $f$  ist stetig, d.h. Urbilder offener Mengen unter  $f$  sind offen.
- (ii) Urbilder abgeschlossener Mengen unter  $f$  sind abgeschlossen.
- (iii) Für alle Elemente  $x \in X$  und jede Umgebung  $V$  von  $f(x)$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $f(U) \subset V$ .
- (iv) Für alle Elemente  $x \in X$  und jede Umgebung  $V$  von  $f(x)$  ist das Urbild  $f^{-1}(V)$  eine Umgebung von  $x$ .
- (v) Für jede Teilmenge  $B \subset Y$  gilt  $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$ , d.h. das Urbild vom Inneren einer Teilmenge  $B \subset Y$  ist stets im Inneren des Urbildes  $f^{-1}(B)$  enthalten.
- (vi) Für jede Teilmenge  $A \subset X$  gilt  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ , d.h. das Bild vom Abschluss einer Teilmenge  $A \subset X$  ist stets im Abschluss des Bildes  $f(A)$  enthalten.

### Aufgabe 3 (8 Punkte):

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass ein zweitabzählbarer topologischer Raum  $X$  stets separabel ist. Hier wollen wir nun zeigen, dass falls  $X = (X, d)$  ein metrischer Raum ist, auch die Umkehrung gilt (also, dass jeder separable metrische Raum  $X$  zweitabzählbar ist).

- (i) Sei  $\mathcal{B}$  eine Menge offener Mengen in einem topologischen Raum  $X$ . Zeigen Sie, dass falls für jede offene Menge  $U$  in  $X$  und jeden Punkt  $x \in U$  ein Element  $V \in \mathcal{B}$  mit  $x \in V \subset U$  existiert, die Menge  $\mathcal{B}$  bereits eine Basis der Topologie sein muss (tatsächlich gilt auch die Umkehrung).
- (ii) Zeigen Sie, dass falls eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $X$  dicht in  $X$  ist, der Schnitt von  $A$  mit jeder nicht-leeren offenen Menge  $U \subset X$  nicht leer ist (tatsächlich gilt auch die Umkehrung).
- (iii) Sei nun  $X = (X, d)$  ein metrischer Raum mit abzählbarer dichter Teilmenge  $S$ . Wir betrachten nun die Menge  $\mathcal{B}$  der offenen Bälle  $B_{<\frac{1}{n}}(x)$  mit Radius  $\frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  um Punkte  $x \in S$ . Begründen Sie kurz, dass  $\mathcal{B}$  abzählbar ist und nutzen Sie die vorherigen Aufgabenteile um zu zeigen, dass  $\mathcal{B}$  eine Basis ist.