Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 25
Blatt 3

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir betrachten den Unterraum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

(i) Ein topologischer Raum X ist total unzusammenhängend, falls die Zusammenhangskomponenten von X genau die Singletons, also die 1-elementigen Teilmengen sind. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ total unzusammenhängend ist.

(ii) Man könnte auf die Idee kommen, dass total unzusammenhängende Räume stets diskret sind. Zeigen Sie, dass dies nicht der Fall ist, indem Sie nachweisen, dass $\mathbb{Q}$ nicht diskret ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(i) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann Hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$ ist.

(ii) Folgern Sie, dass der Equalizer $\mathrm{Eq}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subset X$ zweier stetiger Abbildungen $f, g \colon X \to Y$ abgeschlossen ist, falls Y hausdorffsch ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Urbilder kompakter Teilmengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt.

(ii) Quotientenräume von Hausdorff-Räumen sind hausdorffsch.

(iii) Jeder lokal kompakte Raum (jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung) ist kompakt.

(iv) Unterräume von kompakten Räumen sind kompakt.

(v) Bilder von Hausdorff-Räumen unter stetigen Abbildungen sind hausdorffsch.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten der beiden Räume $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.