Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Jun.-Prof. Dr. Holger Kammeyer
Dr. Philip Möller

Einführung in die Topologie, SoSe 25
Blatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Wir wollen uns überlegen, dass Quotientenräume $X/\sim$ von zweitabzählbaren topologischen Räumen X nicht zwingend wieder zweitabzählbar sein müssen und betrachten dazu den zweitabzählbaren topologischen Raum $X = \mathbb{R}$. Begründen Sie, dass das Kollabieren des Unterraumes $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ einen topologischen Raum liefert, welcher nicht einmal erstabzählbar und somit erst recht nicht zweitabzählbar ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Seien X, Y und K topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass falls K kompakt und $f\colon X \to Y$ eine Identifizierung ist, auch das Produkt $f \times \mathrm{id}_K\colon X \times K \to Y \times K$ eine Identifizierung ist. Sei dafür $g\colon Y \times K \to Z$ eine Abbildung. Wir wollen nun zeigen, dass g genau dann stetig ist, wenn $g \circ (f \times \mathrm{id}_K)$ stetig ist.

(i) Begründen Sie kurz, warum die Hinrichtung gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Projektion $\mathrm{pr}_1\colon X \times K \to X$ abgeschlossen ist, also abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet.

(iii) Nun nehmen wir an, dass $g \circ (f \times \mathrm{id}_K)$ stetig ist. Wir wählen eine offene Umgebung U eines Bildpunktes $g(y_0, k_0) \in Z$ und betrachten $V = \{y \in Y \mid g(\{y\} \times K) \subset U\} \subset Y$. Nutzen Sie Aufgabenteil (ii) und dass f eine Identifizierung ist um zu zeigen, dass V offen und g somit stetig ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
Sei X eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jede Zusammenhangskomponente von X auch wegzusammenhängend ist und somit die Begriffe "Zusammenhangskomponenten" und "Wegzusammenhangskomponenten" für Mannigfaltigkeiten übereinstimmen. Insbesondere ist eine Mannigfaltigkeit X also genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Zeigen Sie, dass jede Mannigfaltigkeit die topologische Summe ihrer Zusammenhangskomponenten ist und folgern Sie, dass sich jede Mannigfaltigkeit als höchstens abzählbare topologische Summe wegzusammenhängender Mannigfaltigkeiten schreiben lässt.